معادلات المستوى		
علم ناظم ونقطة	علم شعاعي توجيه	علم ثلاثة نقاط
$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ حيث: ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$	1- نثبت أن $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين 2- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم 3- نشكل المعادلتين: $\vec{n}.\vec{u}=0$ $\vec{n}.\vec{v}=0$ 4- نحل المعادلتين حلاً مشتركاً ثم نعطي أحد المجاهيل قيمة اختيارية غير صفرية نعوض في القانون	1- نشكل شعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ نعيد خطوات الحالة السابقة
علم مستوي موازي	علم مستويين معامدين	علم مستوي معامد ونقطتين
1- بما أنهما متوازيان فلهما نفس الناظم نعوض في القانون	1- نحدد النواظم $\vec{n_1},\vec{n_2}$ 2- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي المطلوب 3- نشكل معادلتين : $\vec{n}.\vec{n_1}=0$ $\vec{n}.\vec{n_2}=0$ نكمل كما في الحالات السابقة	1- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ 2- نشكل شعاعاً $\overrightarrow{AB}$ و نحدد ناظم المستوي المعلوم $\vec{n'}$ 3- نشكل معادلتين : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ $\vec{n}.\vec{n'}=0$ نكمل كما في الحالة السابقة
معادلة المستوي المحوري	مستوي محدد بتقاطع مستقيمين	مسامح بالباقي
1- نحدد النقطة بأنها منتصف القطعة [AB] 2- نحدد الناظم بأنه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ نعوض في القانون	1- نعتبر نقطة تقاطع المستقيمين هي النقطة المطلوبة نعتبر شعاعي توجيه المستقيم هما شعاعي توجيه المستوي	

المدرس: نذير تيناوي

التمثيل الوسيطي لمستقيم

علم نقطة وشعاع توجيه	علم نقطتين	علم مستوي معامد
$d:\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \quad t \in R \\ z = ct + z_0 \end{cases}$	1- نعتبر شعاع التوجيه $\overrightarrow{AB}$ 2- نختار النقطة A أو B 3- نعوض في القانون	نعتبر ناظم المستوي هو شعاع التوجيه و نعوض في القانون

الفصل المشترك

1- ندرس ارتباط النواظم
2- نحل المعادلتين حلاً مشتركاً
3- نفرض أحد المجاهيل قيمة وسيطية t

الكرة

علم مركز ونصف قطر	علم قطر	علم مركز ونقطة تمر منها
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ حيث: المركز $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ نصف القطر r	1- نوجد المركز وهو منتصف القطر. 2- نوجد نصف القطر. 3- نعوض في القانون السابق	1- نوجد نصف القطر وهو عبارة عن المسافة بين المركز والنقطة التي تمر منها الكرة. 2- نعوض في القانون

كرة تمس مستوي

1- المركز معلوم
2- نصف القطر هو $dis(\Omega, P)$ بعد مركز الكرة عن المستوي.
3- نعوض في القانون.

الأسطوانة

أسطوانة محورها يوازي oz	أسطوانة محورها oy	أسطوانة محورها ox
بفرض إحداثيات مركز القاعدة $A(x_1, y_1, z_1)$ و أن ارتفاع هذه الأسطوانة h و نصف قطر قاعدتها r فإن هذه الأسطوانة تُعرّف بالشكل : $\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2 \\ z_1 \le z \le z_1 + h \end{cases}$ وبوجه الخصوص إذا كان مركز القاعدة هو المبدأ فتصبح المعادلة: $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ 0 \le z \le h \end{cases}$	$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2 \\ y_1 \le y \le y_1 + h \end{cases}$ و بوجه الخصوص إذا كان مركز القاعدة هو المبدأ فتصبح المعادلة: $\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ 0 \le y \le h \end{cases}$	$\begin{cases} (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2 \\ x_1 \le x \le x_1 + h \end{cases}$ و بوجه الخصوص إذا كان مركز القاعدة هو المبدأ فتصبح المعادلة: $\begin{cases} y^2 + z^2 = r^2 \\ 0 \le x \le h \end{cases}$

المخروط		
محوره يوازي oz	محوره يوازي oy	محوره يوازي ox
$\begin{cases}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\frac{r^2}{h^2}(z\\ z_1\le z\le z_1+h\end{cases}$ و إذا كان المركز هو المبدأ : $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{r^2}{h^2}z^2\\ 0\le z\le h\end{cases}$	$\begin{cases}(x-x_1)^2+(z-z_1)^2=\frac{r^2}{h^2}(y\\ y_1\le y\le y_1+h\end{cases}$ و إذا كان المركز هو المبدأ: $\begin{cases}x^2+z^2=\frac{r^2}{h^2}y^2\\ 0\le y\le h\end{cases}$	$\begin{cases}(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\frac{r^2}{h^2}(x\\ x_1\le x\le x_1+h\end{cases}$ و إذا كان المركز هو المبدأ: $\begin{cases}y^2+z^2=\frac{r^2}{h^2}x^2\\ 0\le x\le h\end{cases}$

التمرين الأول: في كلٍ من الحالات الآتية: اكتب معادلة المستوي P :	
1- المستوي P يمر من $A(2,3,1)$ و ناظمه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ حيث $B(3,2,0)$	2- المستوي $P=(ABC)$ حيث $A(3,2,2),B(0,1,0),C(1,1,1)$
3- المستوي P هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ حيث $A(1,1,1),B(3,2,0)$	4- المستوي P المار من النقطتين $A(1,1,1),B(3,-1,1)$ و معامد للمستوي : $x+y+z=1$
5- المستوي P معامد للمستويين : $Q:2x+y-z-1=0$ $R:x+y-3z=0$	6- المستوي P مار بالنقطة $A(1,1,1)$ ويوازي المستوي: $Q:2x+3y-z=1$
7- المستوي P مار من المبدأ ويعامد المستقيم: $d:\begin{cases}x=t+1\\ y=0\\ z=-t+1\end{cases};t\in\mathbb{R}$	
التمرين الثاني: اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d في الحالات الآتية :	
1- المستقيم d يمر من النقطة $A(-1,1,0)$ و يقبل الشعاع $\vec{u}(2,3,-1)$ شعاع توجيه له	2- المستقيم $d=(AB)$ حيث : $A(1,1,2)\ ,B(3,0,1)$
3- المستقيم d يمر من المبدأ و يعامد المستوي $x-y+z=3$	4- المستقيم d المعطى بتقاطع المستويين : $P:2x-y+z-2=0$ $Q:x+y+2z-1=0$
التمرين الثالث: اكتب معادلة الكرة S في الحالات الآتية:	
1- مركزها $A(1,1,3)$ و تمر من $B(0,2,2)$	2- تقبل $[AB]$ قطراً لها حيث : $A(1,2,3)\ ,B(5,2,1)$
3- مركزها $A(1,2,-1)$ و تمس المستوي $P:x-z=1$	

التمرين الرابع: اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها يوازي (oz) ومركز قاعدتها $A(1,1,3)$ و ارتفاعها 5 ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{2}$.
التمرين الخامس: اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها يوازي (oy) ومركز قاعدتها السفلى $A(2,3,1)$ ومركز قاعدتها العليا $B(2,8,1)$, ونصف قطرها 3.
التمرين السادس: اكتب معادلة المخروط الذي محوره يوازي (ox) ومركز قاعدته المبدا ونصف قطرها 1 وارتفاعه 3.
التمرين السابع: ماذا تمثل مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة: $x^2+y^2-z^2=0 \quad ; 0 \le z \le 3$

<table>
<tr><th colspan="3">الوضع النسبي لمستوي مع مستوي</th></tr>
<tr><td>شرط التوازي: ارتباط النواظم
وإذا كان:
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$
كان المستويين منطبقين.</td><td>شرط التقاطع: عدم ارتباط النواظم</td><td>شرط التعامد: جداء النواظم معدوم.</td></tr>
<tr><th colspan="3">الوضع النسبي لمستوي مع مستقيم</th></tr>
<tr><td colspan="3">نعوض المستقيم في المستوي ونميز الحالات الآتية:</td></tr>
<tr><td>$0=0$
المستقيم محتوى في المستوي</td><td>$0=1$
المستقيم يوازي المستوي</td><td>$t=$ عدد
المستقيم والمستوي متقاطعان في نقطة.
لإيجاد احداثياتها نعوض t في المستقيم.</td></tr>
<tr><th colspan="3">الوضع النسبي لمستقيم مع مستقيم</th></tr>
<tr><td colspan="3">ندرس ارتباط اشعة التوجيه ونميز حالتين:</td></tr>
<tr><td>اشعة التوجيه مرتبطة: المستقيمان متوازيان</td><td colspan="2">الأشعة غير مرتبطة: المستقيمان غير متوازيان , ندرس التقاطع:
$x_t=x_s$
$y_t=y_s$
$z_t=z_s$</td></tr>
</table>

ملاحظات:

1- لإثبات أن مستقيم يعامد مستوي نثبت أن الناظم و شعاع التوجيه مرتبطان
2- لإثبات أن شعاعاً معطى هو ناظم على مستوي معلوم يوجد اسلوبين :
أ- الأسلوب الأول : الشعاع عمودي على شعاعين في المستوي
ب- الأسلوب الثاني: الشعاع المعطى مرتبط مع ناظم المستوي

التمرين الأول: في كلٍ من الحالات الآتية , ادرس تقاطع المستويين P, Q و في حال التوازي بيّن فيما إذا كانا منطبقين أم لا .

$P: 2x + y - z = 0 \ , Q: x + y + z = 1$	$P: 2x - y + z - 3 = 0$ $Q: 4x - 2y + 2z - 1 = 0$

التمرين الثاني: ادرس الوضع النسبي للمستقيمين الآتيين:

$$d: \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t \\ z = -t + 1 \end{cases} ; t \in R$$

$$d': \begin{cases} x = -9s + 4 \\ y = -12s + 4 \\ z = 3s \end{cases} ; s \in R$$

التمرين الثالث: d و d' مستقيمان معرفان وفق:

$$d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = t - 1 \end{cases} ; t \in R$$

$$d': \begin{cases} x = 3s - 4 \\ y = s - 1 \\ z = 5s - 6 \end{cases} : s \in R$$

1- أثبت أن d, d' متقاطعان في نقطة N يُطلب تعيين إحداثياتها
2- جد معادلة المستوي P المحدد بهذين المستقيمين

التمرين الرابع: ادرس الوضع النسبي للمستوي مع المستقيم المعطى:

1- $P: 2x - y - z = 3$

$$d: \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = 0 \\ z = 4t - 7 \end{cases} : t \in R$$

2- $P: 2x + y - 3z - 1 = 0$

$$d: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = t + 7 \end{cases} : t \in R$$

المساقط القائمة

على مستوي:	على مستقيم:
1- نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم d المار من D وشعاع توجيهه هو ناظم المستوي $\vec{n}$ P 2- نوجد تقاطع هذا المستقيم مع المستوي فنحصل على D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي P	1- نوجد معادلة المستوي P المعامد للمستقيم d والمار من النقطة D. 2- نوجد نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي P ولتكن D' فتكون المسقط القائم للنقطة D على المستقيم d.
ملاحظة: إن DD' تمثل بعد النقطة D عن المستوي.	**ملاحظة:** إن DD' تمثل بعد النقطة D عن المستقيم.
يمكن حساب بعد نقطة عن مستوي بشكل مباشر: $$dis(D,P)=\frac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$	لا يوجد طريقة أخرى لحساب بعد نقطة ما عن المستقيم **الا المسقط القائم**

الوضع النسبي لمستوي مع كرة

نحسب بعد مركز الكرة عن المستوي ونميز الحالات الآتية:

$dis<r$	$dis=r$	$dis>r$
المستوي يقطع الكرة في دائرة	المستوي يمس الكرة	المستوي لا يشترك مع الكرة بأي نقطة.
يطلب حساب نصف قطر دائرة المقطع باستخدام القانون: $r_c=\sqrt{r^2-dis^2}$	**Nothing…keep going forward**	

المسألة (1)

في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط :

$A(2,-2,2), B(1,1,0), C(1,0,1), D(0,0,1)$

1- تحقق أن النقاط (BCD) لا تقع على استقامة واحدة
2- أثبت أن $y+z-1=0$ هي معادلة المستوي (BCD)
3- أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من A ويعامد المستوي (BCD)
4- عين إحداثيات K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD)
5- اكتب معادلة الكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً لها

المسألة (2)

في معلمٍ متجانس نتأمل النقطة $A(1,1,2)$ و المستويان :

$$P: x - y + 2z - 1 = 0$$
$$Q: 2x + y + z + 1 = 0$$

1- أثبت أن P, Q متقاطعان في فصل مشترك d
2- اكتب تمثيلاً للمستقيم d
3- اكتب معادلة المستوي R المار من A و يعامد كلاً من P, Q
4- جد إحداثيات B نقطة تقاطع d مع المستوي R و استنتج وضع المستويات P,Q,R
5- احسب بعد A عن المستقيم d

المسألة (3)

في معلمٍ متجانس نتأمل النقطة $A(1,2,0)$ و المستويات :

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$
$$Q: x + y + z - 1 = 0$$
$$R: x - z - 1 = 0$$

1- أثبت أن المستويين P, Q متقاطعان في فصل مشترك Δ . اكتب تمثيله الوسيطي
2- تحقق أن المستوي R يعامد Δ و يمر من A
3- أثبت تقاطع المستويات P, Q, R في نقطة I يُطلب تعيينها
4- استنتج بعد A عن المستقيم Δ

المسألة (4)

في معلمٍ متجانس :

$$A(1,1,0), B(1,2,1), C(4,0,0)$$

1- تحقق ان A, B, C ليست على استقامة واحدة
2- أثبت أن المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة $x + 3y - 3z - 4 = 0$
3- ليكن المستويان :

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$
$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في فصل مشترك d له التمثيل الوسيطي

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \quad t \in R \\ z = t \end{cases}$$

4- ما هي نقطة تقاطع المستويات

$$P, Q, (ABC)$$

5- احسب بعد A عن المستقيم d

المسألة (5)

في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط :

$$A(1,3,0), B(0,6,0), N(0,0,3), M(0,6,2)$$

1- اكتب معادلة المستوي (AMN)

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من O ومعامد للمستوي (AMN)

3- أثبت أن المستوي الذي معادلته $z - 1 = 0$ هو المستوي المحوري للقطعة $[BM]$.

المسألة (6)

1- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

2- تحقق ان المستوي P الذي معادلته:

$$P: x - y + z + 3 = 0$$

يمس الكرة S.

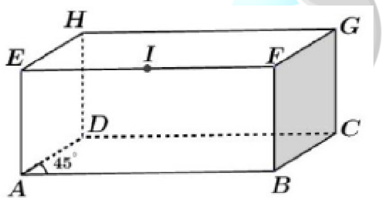
المسألة (7)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لتكن النقطة $A(1,-2,0)$ والمستوي $P: x + 2y + z - 1 = 0$:

احسب بعد النقطة A عن المستوي P ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

المسألة (8)

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$ وقياس الزاوية $\widehat{DAB}$ يساوي $45°$ والنقطة I منتصف $[EF]$:



1- احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

2- عين موضع النقطة M التي تحقق:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

المسألة (9)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$:

1- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$.

2- أثبت أن المستقيمين (AB) و d متعامدان.

المسألة (10)

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$ والمستوي:

$$P: 3x - y - 3z - 8 = 0$$

1- أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P.

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB), ثم عين إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P.

المسألة (11)

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية:

$$A(2,0,1)\ , B(1,-2,1)\ , C(5,0,5)\ , D(6,2,5)$$

1- أثبت أن $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

2- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

واستنتج أن النقاط D, C, B, A تقع في مستو واحد.

المسألة (12)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ والمطلوب:

1- احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ ثم استنتج $\cos(\widehat{BAC})$.

2- إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC, عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق:

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

المسألة (13)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-2,1)$ والمطلوب:

أعط معادلة للمجموعة S المكون من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة:

$$MA = MB$$

وما طبيعة المجموعة S.

المسألة (14)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(2,2,4)\,,B(2,0,-2)$:

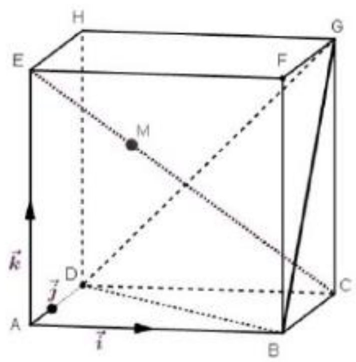
1- اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

2- اعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ، ما طبيعة المجموعة S؟

المسألة (15)

$ABCDEFG$ مكعب طول حرفه يساوي 2, نتأمل المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ في المعلم

$\overrightarrow{AE}=2\vec{k}$ و $\overrightarrow{AD}=2\vec{j}$ و $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$:



1- اكتب معادلة المستوي (GBD).

2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (EC).

3- جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD).

4- جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$$

5- أثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC).

المسألة (16)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(1,1,0)\,,B(1,2,1)\,,C(4,0,0)$

1- أثبت أن النقاط $A\,,B\,,C$ ليست على استقامة واحدة.

2- أثبت ان معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة:

$x+3y-3z-4=0$

3- ليكن المستويان:

$$P: x+2y-z-4=0$$

$$Q: 2x+3y-2z-5=0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

4- ما هي نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC).

5- احسب بعد A عن المستقيم d.

المسألة (17)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$$E(1,-1,1)\ ,D(0,4,0)\ ,C(4,0,0)$$

$$B(1,0,-1), A(2,1,3)$$

1- جد $\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{CE}\ ,\overrightarrow{CD}$.

2- أثبت أن النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

3- أثبت أن (AB) يعامد للمستوي (CDE).

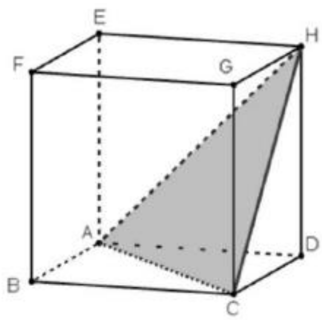
4- اكتب معادلة المستوي (CDE).

5- احسب بعد B عن المستوي (CDE).

6- اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE).

المسألة (18)

نتأمل في معلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$.



1- اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط:

$$A\ ,C\ ,H\ ,F\ ,D$$

2- اكتب معادلة المستوي (ACH).

3- أثبت أن المستوي P الذي معادلته:

$$P: -2x+2y-2z+1=0$$

يوازي المستوي (ACH).

4- بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن D و I و F على استقامة واحدة.

5- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S.

المسألة (19)

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:

$$P: 2x-y+2z-2=0$$

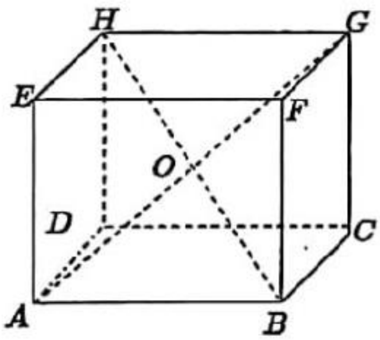
$$Q: x+y+z-1=0$$

$$R: x-z-1=0$$

1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان مشترك Δ, اكتب تمثيله الوسيطي.
2- تحقق أن المستوي يعامد Δ ويمر بالنقطة A.
3- أثبت أن المستويات P , Q , R تتقاطع بالنقطة I يطلب تعيين احداثياتها.
4- استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ.

المسألة (20)

مكعب طول حرفه 2, O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$.



نختار معلم متجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$. والمطلوب:

1- جد إحداثيات النقاط A و B و G و H و O.
2- أعطِ معادلة المستوي (GOB).
3- احسب $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}$ واستنتج $\cos\widehat{GOB}$.
4- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC).
5- أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB).
6- جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).

المسألة (21)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$$A(-1,2,3)\ ,B(2,1,1)\ ,C(-3,4,-1)\ ,D(3,1,1)$$

1- جد $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ وبين أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان.
2- أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC).
3- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة D والعمودي على المستوي (ABC).
4- احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$.
5- بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ أثبت أن المستقيمين (CG) و (AB) متوازيان.

المسألة (22)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(1,1,2)$ والمستويان:

$$P: x-y+2z-1=0$$
$$Q: 2x+y+z+1=0$$

1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان في فصل مشترك d.
2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d.
3- اكتب معادلة المستوي R المار من A المعامد للمستويين P و Q.
4- جد إحداثيات B الناتجة من تقاطع المستوي R والمستقيم d.
5- احسب بعد النقطة A عن المستقيم d.
6- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q.

المسألة (23)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$$D(1,1,1)\,,C(0,0,1)\,,B(0,1,0)\,,A(1,0,0)$$

1- جد إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC, وأثبت أن (OG) عمودي على المستوي (ABC).
2- جد معادلة المستوي (ABC).
3- نعرف النقاط $A'(2,0,0)\,,B'(0,2,0)\,,C'(0,0,4)$ للمستوي $A'B'C'$. أثبت أن $2x+2y+z-4=0$ معادلة المستوي $(A'B'C')$.
4- أثبت أن Δ الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$ يقبل التمثيل الوسيطي:

$$\Delta:\begin{cases} x=t \\ y=3-t;t\in\mathbb{R} \\ z=-2 \end{cases}$$

5- احسب بعد النقطة $D(1,1,1)$ عن المستقيم Δ.

حجوم المجسمات الفراغية	
المجسم له قاعدتين	المجسم له قاعدة واحدة
$V=S\times h$	$V=\frac{1}{3}S\times h$
حيث أن S مساحة القاعدة , h الارتفاع	
ملاحظة نذيرية: بعد حساب الحجم يمكن استنتاج مساحة قاعدة أخرى له أو ارتفاع اخر له ويتم ذلك بحساب الحجم من منظور آخر (بدلالة القاعدة أو الارتفاع حسب الطلب)	

المجموعات النقطية	
$AM=BM$ أو $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|=\left\|\overrightarrow{BM}\right\|$	تمثل مستوي محوري للقطعة $[AB]$
$AM=const$ أو $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|=const$	تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها $const$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$	تمثل كرة التي قطرها $[AB]$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$	تمثل المستوي الذي يمر من النقطة A ويقبل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظماً له

معادلة من الشكل: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$	نتمم إلى مربع كامل لنصل إلى الشكل $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=k$ ونميز الحالات: 1- $k<0$ فتكون معادلة تمثل المجموعة الخالية Φ. 2- $k=0$ فتكون معادلة تمثل نقطة التي إحداثياتها $A(x_0,y_0,z_0)$. 3- $k>0$ فتكون المعادلة تمثل كرة التي نصف قطرها k ومركزها $A(x_0,y_0,z_0)$.
في باقي الحالات	1- نفرض $M(x,y,z)$ 2- نعوض في المعادلة 3- نصلح ثم نقارن شكل المعادلة المختزل مع الاشكال السابقة
لا ننس الشكل العام لمعادلة المخروط والاسطوانة	

تطبيقات المسافة في الفراغ		
انتماء نقطة لكرة	انتماء نقطة لمستوي محوري	معرفة طبيعة مثلث
نحسب بعد النقطة عن مركز الكرة ونقارن من نصف القطر	نحسب بعد النقطة عن طرفي القطعة المستقيمة ونقارن بينهم	نحسب أطوال أضلاع المثلث ونقارن بينها ثم نختبر عكس فيثاغورث
جداء السلمي		
$\vec{u}.\vec{v}=\|\|\vec{u}\|\|\|\|\vec{v}\|\|\cos\alpha$	$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\|\vec{u}+\vec{v}\|\|^2-\|\|\vec{u}\|\|^2-\|\|\vec{v}\|\|^2\right]$	$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

طلبات مميزة:

1- أثبت أن النقطة J هي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث ABC:
نثبت أن $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC}=0$ و $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AC}=0$.

2- حساب $\cos\alpha$ عن طريق القانون الأول في الجداء السلمي.

3- اثبات أن شعاعين متساويين بالطول.