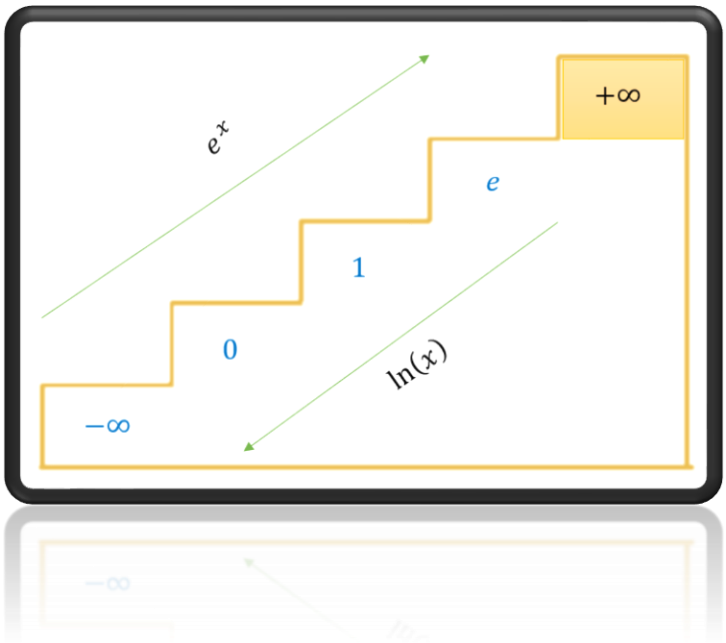
حول النهايات اللوغارتمية والأسية	
النهايات البسيطة	$\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$ $\lim\limits_{x\to0^+} lnx = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
نهايات حكم القوي على الضعيف	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{lnx} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
عند الصفر	$\lim\limits_{x\to0} xlnx = 0$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
عند الواحد	$\lim\limits_{x\to1} \frac{lnx}{x-1} = 1$ $\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{lnx} = 1$
عند $-\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$



خواص اللوغارتم:

لوغارتم الجداء	$\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$
لوغارتم القسمة	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
لوغارتم القوة	$\ln(a^n) = nln(a)$
لوغارتم الجذر	$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
لوغارتم المقلوب	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
خواص تقابلية	$\ln(e^x) = x$ $e^{\ln(x)} = x$
مشتقه	مشتق المضمون المضمون

تدرب : اختر الإجابة الصحيحة :

1) فرض a, b, c, d أعداد حقيقية موجبة تماماً عندئذ المقدار $\ln\left(\frac{a^2 \times b^3}{c \times d^6}\right)$ يساوي :

A	$2lna + 3lnb - lnc + 6lnd$	B	$2\ln(a) + 3\ln(b) - \ln(c) - 6lnd$
C	$2lna \times 3lnb - lnc - 6lnd$	D	$6\ln(ab) - 6\ln(cd)$

2) بفرض $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ عندئذٍ قيمة المجموع $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

A	$\ln(n+1)$	B	$\ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$
C	$\ln(n)$	D	$-\ln(n)$

3) مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق الشرط $\ln(x) = \ln(y+1)$

A	نصف دائرة	B	فرع من قطع مكافئ
C	نصف دائرة	D	فرع من قطع زائد

4) مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق الشرط $\ln(y) = 2\ln(x)$

A	نصف دائرة	B	فرع من قطع مكافئ
C	نصف دائرة	D	فرع من قطع زائد

5) مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق الشرط $\ln(y) + \ln(x) = 0$

A	نصف دائرة	B	فرع من قطع مكافئ
C	نصف دائرة	D	فرع من قطع زائد

مجموعات نقطية هامة

مستقيم أفقي	$y = b$
مستقيم شاقولي	$x = a$
مستقيم مائل	$y = ax + b$
قطع مكافئ	$y = \mp x^2$
قطع زائد	$y = \frac{A}{x}$

و بوجود شرط نحصل على جزء من التابع

المعادلات اللوغارتمية

لا تحتاج إلى خواص		تحتاج إلى خواص
$\ln(a) = \ln(b)$	$\ln(a) = m$	١- نوجد شروط الحل. ٢- نطبق خواص اللوغارتم للعودة لأحد الحالات السابقة. ٣- نأخذ e للطرفين. ٤- نقبل ونرفض حسب شرط الحل.
١- نوجد شروط الحل. ٢- نأخذ e للطرفين. ٣- نقبل ونرفض حسب شرط الحل		

في المتراجحات تنطبق كل القواعد السابقة بالإضافة إلى:

١- الحل سيكون مجالاً.

٢- لمعرفة الحلول المقبولة نقاطع مجال الحلول S مع شرط الحل E.

انتبه!! في المتراجحات نوجد شرط الحل للطرف الأصغر فقط مثال:

$$\ln(u(x)) \leq \ln(v(x))$$

هنا نوجد شرط الحل لـ u فقط.

معادلات من الشكل: $a\ln^2(x) + b\ln(x) + c = 0$	حل جملة معادلتين
١- نوجد شرط الحل. ٢- نحلها باستخدام دلتا أو التحليل المباشر ٣- نقبل ونرفض حسب شرط الحل. **في حالة المتراجحات:** ننظم جدولاً بشرط أن نضع في حقل x شرط الحل.	١- نوجد شروط الحل. ٢- نحاول الوصول إلى تجانس في المجاهيل (مع تغيير المتحول عند الحاجة). ٣- حل مشترك. ٤- نقبل ونرفض حسب شرط الحل.

تمارين

١	$-\ln(3x-4) + \ln(x^2-4) = 0$	٢	$\ln(x^2-4) \leq \ln(-3x)$
٣	$\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$	٤	$-\ln(x+1) + \ln(x-2) = 2$
٥	$(\ln x)^2 - 5\ln x = 6$	٦	$(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 \leq 0$
٧	$\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -12 \\ \ln(xy) = 1 \end{cases}$	٨	$\begin{cases} x \cdot y = 4 \\ \ln^2(x) + \ln^2(y) = \frac{5}{2}\ln^2(2) \end{cases}$

مسألة الأولى

ليكن $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.

١- a- تحقق أن $P(-1) = 0$.

b- استنتج أن $P(x)$ بكتب بالصيغة $P(x) = (x+1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

c- حل المتراجحة $P(x) \leq 0$.

٢- استعمل المعلومات السابقة لحل المتراجحة $2ln(x) + ln(2x+5) \leq ln(2-x)$

مسألة الثانية نفترض وجود عددين حقيقين موجبين تماماً a, b يحققان : $ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{lna+lnb}{2}$ جد $\frac{a}{b}$

المعادلات الأسية

يجب مراعاة الملاحظات الآتية:

١- عند وجود أس وعكسه نضرب بالقوة التي أسها موجب.

٢- عند وجود أس وضعفه نفرض القوة ذات الأس الصغير t.

٣- قد تحتاج استخدام خواص القوى $(e^{x+1} = e.e^x)$.

ملاحظة: يوجد بعض المعادلات الآسية التي أساسها ليس e فتعامل نفس المعاملة ولكن انتبه:

١- يجب توحيد الأساس.

٢- نأخذ لوغارتم الطرفين ونعزل x.

تمارين

١	$e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$	٢	$e^{2x^2-1} \geq 3$
٣	$e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$	٤	$e^x + \frac{e}{e^x} = 1 + e$
٥	$e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$	٦	$e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$

٦	$\frac{e^{-x}-1}{e^{x}-1}=-2$	٨	$\frac{2^x}{2^x+1}<\frac{1}{3}$
٩	$4^x+2^{x+1}-3\leq 0$	١٠	$2^{x+1}-10\times 2^x+12\geq 0$
١١	$3^{x+1}+2\times 3^{-x}\geq 7$	١٢	$\begin{cases} e^x-\frac{1}{2}e^y=1 \\ 2e^x+e^y=4+e \end{cases}$
١٣	$\begin{cases} 3^{x+y}=9 \\ 3^x+3^y=4\sqrt{3} \end{cases}$	١٤	$\begin{cases} e^{4x}e^y=\frac{1}{e^2} \\ xy=-2 \end{cases}$

حول النهايات

حالة $\frac{\infty}{\infty}$

في التوابع الكسرية الصحيحة : نأخذ المسيطر من البسط و المسيطر من المقام

في باقي الحالات نخرج أقوى جد عاملاً مناسباً :

ترتيب القوى $e^x > x^n > lnx$

أقوى حد في الحد $\sqrt{x^2+3}$ هو $\sqrt{x^2}$ ثم $|x|$ ثم نفك القيمة المطلقة حسب السعي

أمثلة

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{\sqrt{x^2+5}}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+3x+1}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{lnx}{e^x}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

	5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x-3}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx-1}{x-1}$ 7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}-e^x+1}{e^x+3}$
حالة $\frac{0}{0}$	1- يوجد جذر : نضرب البسط و المقام بالمرافق 2- لا يوجد جذر : تحليل البسط و المقام إلى جداء أقواس **أمثلة:** 1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}$ $= \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x+1-1}{x(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}$ $= \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{(x+1)(\sqrt{x+1}+1)} = \dfrac{1}{2}$ 2) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-2}{x+1} = -\dfrac{1}{2}$
في حالة وجود قيمة مطلقة	نتخلص من القيمة المطلقة حسب السعي **أمثلة:** 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\lvert x^2-1\rvert}{x+1}$ نلاحظ أنه عند $-\infty$ يكون المقدار x^2-1 موجباً و بالتالي قيمته المطلقة نفسه $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{x+1} = -\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lvert x+1\rvert-\lvert 1-2x\rvert}{x+3}$

حالة $\infty - \infty$	نلاحظ أنه عند $+\infty$ يكون المقدار $x+1$ موجباً فقيمته المطلقة نفسه $x+1$ أما المقدار $1-2x$ سالباً فقيمته المطلقة عكسه $2x-1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1-(2x-1)}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+2}{x+3}=-1$ 3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\lvert4x-3\rvert-\lvert2x-1\rvert}{x-1}$ نلاحظ أنه عند الواحد يكون $4x-3$ موجباً فقيمته المطلقة $4x-3$ أما $2x-1$ فيكون موجباً أيضاً فقيمته المطلقة نفسه $2x-1$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-3-(2x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{x-1}=2$ 4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\lvert2x+3\rvert-\lvert x^2-18\rvert}{x-3}$ نلاحظ أن $2x+3$ عند الـ 3 موجب فقيمته المطلقة نفسه $2x+3$ و x^2-18 عند الـ 3 سالب فقيمته المطلقة عكسه $18-x^2$ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x+3-(18-x^2)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+5)(x-3)}{x-3}$ $=8$
حالة $\infty - \infty$	$\sqrt{x^2+3}-x$ نربع $(x^2+3\ ,x^2)$ 😀 $\sqrt{4x^2+4}+2x$ نربع $(4x^2+4\ ,4x^2)$ 😀 $\sqrt{x^2+x+1}-3x$ نربع $(x^2+x+1\ ,9x^2)$ 😔 $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2x^2+3}$ نربع $(x^2+x,2x^2+3)$ 😔 في حالة النهاية السعيدة: نضرب بالمرافق في حالة النهاية الحزينة: نخرج أقوى درجة عامل مشترك من كل حد و نراعي السعي
حالة $0.\infty$	نهايات للحفظ: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$

	$\lim\limits_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$
عدم التعيين في اللوغارتمي	1- نشر و تحليل 2- عامل مشترك 3- توحيد مقامات أو تفريق مقامات 4- خواص اللوغارتم 5-تغيير المتحول
عدم التعيين في الأسي	1- إذا كان الأسي داخل اللوغارتمي . نخرج أكبر أسية عامل مشترك 2- إذا كان e^{-x} نستبدله بـ $\frac{1}{e^x}$ 3- إذا كان أسي و لوغارتمي ...نضرب بسط و مقام بـ e^x

تدرب : اختر الإجابة الصحيحة

1) نهاية التابع $f(x) = x - lnx$ عند $+\infty$

A	$+\infty$	B	$-\infty$
C	0	D	1

2) نهاية التابع $f(x) = \frac{1-lnx}{x}$ عند $+\infty$

A	$+\infty$	B	$-\infty$
C	0	D	1

3) نهاية التابع $f(x) = \frac{x-lnx}{x+lnx}$ عند $+\infty$

A	$+\infty$	B	$-\infty$
C	0	D	1

4) نهاية التابع $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$ عند $+\infty$

A	$+\infty$	B	$-\infty$
C	0	D	1

5) نهاية التابع $f(x) = xln^2(x)$ عند الصفر هي :

A	$+\infty$	B	$-\infty$
C	0	D	1

6) نهاية التابع $f(x) = \frac{1}{x(1-lnx)}$ عند الصفر من اليمين :

A	$+\infty$	B	$-\infty$
C	0	D	1

7) نهاية التابع $f(x) = \ln(2x+1) - \ln(x-1)$ عند $+\infty$

A	$+\infty$	B	**ln2**
C	0	D	1

8) نهاية التابع $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+sinx)}{x}$

A	$+\infty$	B	$-\infty$
C	0	D	1

9) قيمة العدد λ حتى يكون $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\lambda x+1)-\ln(2x+3)=1$

A	e	B	$ln2$
C	$\frac{1}{e}$	D	$2e$

10) نهاية التابع $f(x)=x^2-e^x$ عند $+\infty$

A	$+\infty$	B	$-\infty$
C	0	D	1

11) نهاية التابع $f(x)=x-\ln(e^x+1)$ عند $+\infty$

A	$+\infty$	B	$-\infty$
C	0	D	1

12) نهاية التابع $f(x)=\frac{1}{x}(e^x-1)$ عند 0

A	$+\infty$	B	$-\infty$
C	0	D	1

13) إن نهاية التابع $g(x)=\ln(x)-e^x$ عند $+\infty$:

A	$+\infty$	B	$-\infty$
C	0	D	1

14) نهاية التابع $f(x)=\frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$ عند $+\infty$

A	$+\infty$	B	$-\infty$
C	0	D	1

15) نهاية التابع $f(x)=e^{-x}+x-1$ عند $-\infty$

A	$+\infty$	B	$-\infty$
C	0	D	1

حول تغيير المتحول

عندما يكون الصفر ناتج عن $\ln(1)$ و في حالة 1^∞

1- نفرض المضمون $1+t$

2- نعزل x بدلالة t

3- نغير السعي $t\to 0$

نعوض لنصل إلى المبرهنة $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

تدرب : اختر الإجابة الصحيحة :

1) نهاية التابع $f(x)=\frac{\ln(3-x)}{2x-4}$ عند $a=2$

A	$\frac{1}{2}$	B	$-\frac{1}{2}$
C	$+\infty$	D	$-\infty$

2) نهاية التابع $f(x)=xln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ عند $+\infty$:

A	$+\infty$	B	$-\infty$
C	0	D	1

3) إن نهاية التابع $f(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{x}{2}}$ عند $+\infty$:

A	e^{-1}	B	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
C	$\sqrt{e}$	D	e

4) نهاية التابع $f(x)=(2-x)^{\frac{1}{x-1}}$ عند الواحد

A	e^{-1}	B	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
C	$\sqrt{e}$	D	e

حول النهايات المثلثية	
في حال مضمون المثلثي ∞	إحاطة
في حال مضمون المثلثي 0	نسعى لاستخدام واحدة من المبرهنات $\lim_{t\to 0}\frac{sint}{t}=1$ $\lim_{t\to 0}\frac{tant}{t}=1$
دساتير مفيدة لحالة $\frac{0}{0}$	$1-\cos^2(\text{زاوية})=\sin^2(\text{الزاوية})$ $1-\cos(\text{الزاوية})=2\sin^2(\text{نصفها})$ $1-\cos(\text{الزاوية})=\frac{\sin^2(\text{الزاوية})}{1+\cos(\text{الزاوية})}$ $\cos(a)-\cos(b)=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

تدرب : اختر الإجابة الصحيحة :

1) نهاية التابع $f(x)=\frac{xsinx}{1-\cos(2x)}$ عند الصفر

A	$\frac{1}{4}$	B	4
C	$\frac{1}{2}$	D	2

2) نهاية التابع $f(x)=\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{xsinx}$ عند الصفر :

A	-4	B	4
C	1	D	2

3) نهاية التابع $a=0^+$; $f(x)=sinx\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ عند الصفر

A	0	B	4
C	1	D	2

تمرينات و مسائل :

التمرين الأول : ليكن f التابع المعرف على $[0,+\infty[$ بالشكل: $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$

1- اثبت ان $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

2- استنتج ان $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\leq f(x)\leq\frac{1}{2\sqrt{x}}$, وما نهاية f عند $+\infty$ ؟

التمرين الثاني : ليكن $f(x)=\frac{x}{2}+2\sin(x)$

1- ادرس سلوك التابع f .

2- أوجد مجالاً يحصر القيمة $f(1000)$

التمرين الثالث : عين قيمة m ليكون f مستمراً عند الصفر :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{cosx-1}{x^2} & :x\neq 0\\ m+1 & :x=0\end{cases}$$

التمرين الرابع : عين قيمة m ليكون f مستمراً عند الصفر

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x-lnx} & :x\neq 0\\ m & :x=0\end{cases}$$

السؤال الخامس: ادرس استمرار التابع f عند الصفر :

$f(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$: $x\neq 0$ و $f(0)=0$

دون ملاحظتك

السؤال السادس : ادرس استمرار التابع :

$$f(x)=\begin{cases}x^2\left(1-\dfrac{lnx}{x}\right) & : x\neq 0\\ 1 & : x=0\end{cases}$$

السؤال السابع : ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=\frac{2lnx+3}{lnx+1}$. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$

السؤال الثامن : ليكن f,g التابعان المعرفان وفق : $f(x)=\frac{2x}{x-1}$ و $g(x)=\frac{3x}{x+4}$.

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g\big(f(x)\big)$

<table>
<tr><th colspan="3">حول المقارب المائل</th></tr>
<tr><td>شرط وجوده</td><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$</td></tr>
<tr><td>نتيجة</td><td colspan="2">لا يجتمع مقارب أفقي ومائل في نفس الجوار</td></tr>
<tr><td rowspan="3">أساليب إيجاده</td><td>التابع من الشكل:
$y=ax+b+u(x)$</td><td>$y_d=ax+b+\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x)$
بشرط $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x)=\ell\neq\infty$</td></tr>
<tr><td>التابع من الشكل:
$\sqrt{ax^2+bx+c}$</td><td>1- نتمم المضمون إلى مربع كامل
$f(x)=\sqrt{a(x-x_0)^2+y_0}$
2- نهمل y_0 فنحصل على $y_d=$
$y_d=|a(x-x_0)|=\sqrt{a(x-x_0)^2}=\begin{cases}a(x-x_0)\,;x\to+\infty\\-a(x-x_0)\,;x\to-\infty\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>تابع كسري درجة بسطه أكبر من درجة مقامه بدرجة واحدة</td><td>نقسم البسط على المقام قسمة إقليدية
فنحصل على:
$f(x)=ax+b+u(x)$
نعود للحالة الأولى.
ملاحظة: إذا كان المقام حد وحيد نستطيع الإستفادة من التفريق بدل القسمة</td></tr>
</table>

	تابع لوغارتمي يحوي e^x بالحشوة	نخرج الأسي (المسيطر) عامل مشترك مثلاً: $f(x)=\ln(e^x+a)=\ln\left(e^x\left(1+\frac{a}{e^x}\right)\right)$ $=\ln(e^x)+\ln\left(1+\frac{a}{e^x}\right)=x+\ln\left(1+\frac{a}{e^x}\right)$ ونعود للحالة الأولى.
	الحالة العامة	بفرض $y_d=ax+b$: $a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\ ;\ b=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)-ax$
ملاحظة	في كل الحالات السابقة عدا الحالة العامة يُطلب إثبات المقارب المفروض	1- نشكل الفرق $f(x)-y_\Delta$ 2- نثبت أن نهاية الفرق صفر
أساليب دراسة الوضع النسبي	الفرق واضح الإشارة	من مثل $e^x,\frac{1}{x^2},\ln(1+e^{u(x)}),-\frac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$
	الفرق غير واضح الإشارة و هو تابع بسيط	نعدم الفرق و ننظم جدولاً
	الفرق غير واضح الإشارة و هو تابع مختلط	1- نفرض الفرق تابعاً مساعداً $g(x)$ 2- ندرس اطراده (تغيرات دون نهايات) 3- نحدد إشارة المشتق بالتجريب 4- ننظر في إشارة الأعداد المتخفية داخل الأسهم 5- حسب الإشارة نحدد الوضع النسبي
	$y_\Delta=b$ ولديك جدول تغيرات f	نضيف سطر إلى جدول تغيرات f و ننظر في إشارات الأسهم المختبئة

ملاحظة	هذه الأفكار لدراسة الوضع النسبي مع أي تابع آخر وليس مع المقارب فقط : 1- الوضع النسبي مع مقارب 2- الوضع النسبي مع مماس 3- الوضع النسبي مع تابع آخر

تذكرة : معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها a هي $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

تمرينات ومسائل :

المسألة الأولى : ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+1}$

1- احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه

2- جد معادلة المقارب المائل عند $+\infty$ و ادرس وضعه النسبي مع المنحني

3- أثبت أن $y = x + 3$ مقارب مائل عند $-\infty$ و استنتج الوضع النسبي

4- اكتب معادلة المماس T في النقطة منه التي فاصلتها $x = 0$

5- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها ثم ادرس وضع C_f مع المـ

6- ارسم ما وجدته من مقارب

دون ملاحظتك

المسألة الثانية : ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

1- أثبت أن f فردي

2- احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه

3- اكتب معادلة المماس T في النقطة منه التي فاصلتها $x = 0$

4- ادرس وضع C_f مع مماسه T ثم ارسمهما

المسألة الثالثة : C_f الخط البياني للتابع $f(x) = 2x + 1 + \sqrt{x^2+4x+5}$

1- اكتب $x^2 + 4x + 5$ بالشكل القانون

2- ابحث عن معادلة المقارب المائل عند $-\infty$

3- ادرس الوضع النسبي للخط c_f مع مقاربه

المسألة الرابعة : ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق : $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

جد معادلة المقارب المائل للخط c_f عند $+\infty$

المسألة الخامسة : ليكن f التابع المعرف على $]4, +\infty[$ وفق $f(x) = 5 - 4x + \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$.

أثبت أن $y = 5 - 4x$ مقارب مائل و ادرس الوضع النسبي لهما .

المسألة السادسة : ليكن f, g تابعان معرفان على المجال $]-1, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad , g(x) = \frac{x}{x+1}$$

1- ادرس الوضع النسبي بين C_g, C_f

2- أثبت أنهما يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها 0 و اكتب

شروط المماس المشترك

اختر الإجابة الصحيحة :

1) ليكن C الخط البياني لتابع f معرف على R و يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$

معادلته $y = 3x - 5$ عندئذٍ : $\lim_{x\to+\infty} \frac{-x+f(x)}{x}$

A	2	B	4
C	1	D	2

2) معادلة المقارب المائل للخط c_f المعرف وفق : $f(x) = x + \frac{2x^2+1}{x+3}$

A	$y = x$	B	$y = x + 2$
C	$y = -x$	D	لا يوجد مقارب مائل

حول الجزء الصحيح	
صورة ونهاية تابع الجزء الصحيح عند عدد	يرمز لتابع الجزء الصحيح $E(x)$ ومهمته هي تقريب الحشوة إلى **أصغر** عدد صحيح مثل: $E(2.1)=2$ $E(3.7)=3$ $E(\pi)=E(3.14)=3$ $E(\sqrt{2})=E(1.4)=1$ ملاحظة: لحساب نهاية الجزء الصحيح عند عدد نعوض في الفرع ذو المجال المفتوح (الفرع سنتعلمه بعد قليل)
نهاية تابع الجزء الصحيح عند ∞	1- ننطلق من: $x-1<E(x)\leq x$ 2- نستعمل خطوات ومبرهنات الإحاطة
كتابة الجزء الصحيح بصيغة مستقلة	1- نجزئ مجال الدراسة إلى عدة مجالات طولها 1. مثال: $I=[0,2[$ $I=\begin{cases}[0,1[\\ [1,2[\end{cases}$ 2- نعوض قيمة تابع الجزء الصحيح في المجال المرافق (دوماً ستكون القيمة التي المجال مغلق عندها) 3- مبروووك عليك! • ملاحظة: إذا كان المجال من الشكل $[a,b]$ فبعد تجزيئه لمجالات طولها واحد نضيف فرع في النهاية $x=b$.
استمرار الجزء الصحيح	ندرس استمرار التابع عند كل نقطة مكررة ونميز حالتين:

	١- إذا كانت جميع النقاط المكررة محققة لشرط الاستمرار ⇐ التابع مستمر على مجاله ٢- إذا كانت واحدة فقط من النقاط المكررة غير محققة لشرط الاستمرار ⇐ التابع غير مستمر على مجاله
رسم الجزء الصحيح	نرسم كل فرع على مجاله

تدرب(١): ليكن التابع f المعرف على $[1,3[$ وفق $f(x) = 2x - 3E(x)$,

١- اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$ ٢-ادرس استمرار f عند ٢ . و هل هو مستمر على المجال $[1,3[$

٣-ارسم c_f ٤-احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

تدرب (٢) : احسب نهاية المقدار $\frac{1+E(\ln(x))}{x}$ عند $+\infty$:

تدرب (٣) : اختر الإجابة الصحيحة :

١) ليكن f التابع المعرف على $I = [-2,0[$ وفق $f(x) = \left(x + mE(x)\right)^2$ حيث $m \in R^*$,

فإن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند (-1) هي :

A	$-\frac{3}{2}$	B	$-\frac{2}{3}$
C	$\frac{3}{2}$	D	$-\frac{3}{2}$

٢) مجموعة تعريف التابع $f(x) = \frac{1}{1-E(x)}$

A	$\mathcal{R}\backslash\{1\}$	B	$]-\infty,1[\cup[2,+\infty[$
C	$\mathcal{R}^*$	D	$[2,+\infty[$

حول تعريف النهايات بلغة المجالات

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$	$y = \ell$ مقارب افقي في جوار $+\infty$
	الصفة المميزة للتعريف: عين عدداً حقيقياً $x > A$ ليكون f ينتمي لمجال

	الخطوات: 1- نحدد المركز $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{b+a}{2}$ 2- نحدد نصف القطر $\varepsilon = b - \ell$ 3- نعوض في القانون: $\lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$ 4- نصلح ثم ندخل القيمة المطلقة إلى البسط والمقام ثم نتخلص منها حسب السعي.
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$	لا يملك مقارباً أفقياً مع احتمال وجود مقارب مائل
	عين عدداً A بحيث يكون $x > A$ $f(x) \in [M, +\infty[$ أو $f(x) > M$
	الخطوات: 1- نضع $f(x) > M$ 2- نعزل x لنصل إلى $x > A$

دراسة قابلية اشتقاق عند نقطة

نقول إن التابع f قابل للاشتقاق عند النقطة a إذا كانت النهاية

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

موجودة ومحدودة ووحيدة وندعو ذلك (f قابل للاشتقاق عند a أو f اشتقاقي عند a)

- الخطوات:

1- نعرف التابع $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

2- نصلح و نحاول اختصار المقام

3- نحسب النهاية عند a

٦- فإذا كانت النهاية عدد حقيقي m قلنا إن f قابل للاشتقاق (اشتقاقي) عند a

و إلا نقول إنه غير اشتقاقي و نرمّز $f'(a) = m$

في حال كان الجواب ∞ قلنا أن f غير اشتقاقي و يقبل مماساً شاقولياً معادلته $x = a$

ادرس قابلية اشتقاق f عند a الموافقة :	
$f(x) = \sqrt{x+3}$,$a = 1$	$f(x) = \begin{cases} x^2(1-lnx) : x > 0 \\ 0 \quad\quad : x = 0 \end{cases}$ $a = 0$
$f(x) = x\|x\|$,$a = 0$	$f(x) = x\sqrt{2x-x^2}$,$a = 0{,}2$

قابلية اشتقاق تابع على مجال

- **مبرهنات:**
  - كل تابع صحيح اشتقاقي على R
  - التابعان $x \mapsto sinx$ و $x \mapsto cosx$ اشتقاقيان على R
  - التابع $x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0, +\infty[$
  - التابع الكسري اشتقاقي على R ما عدا القيم التي تعدم مقامه
  - مجموع وفرق تابعين اشتقاقين على I هو اشتقاقي على I
- **مجال اشتقاق التابع الجذري:**

إن أي تابع جذري (مضمونه صحيح) معرف على مجال من النمط $[a, +\infty[$ أو $]-\infty, a]$ أأو $[a, b]$ شتقاقي حتماً على المجال $]a, +\infty[$ أو $]-\infty, a[$ أو $]a, b[$ ثم ندرس قابلية الاشتقاق عند الطرف a و الطرف b فإذا كان قابلاً للاشتقاق. نغلق مجال الاشتقاقية.

سر المصلحة : إذا كانت القيمة التي تعدم مضمون الجذر تعدم أمثاله كان f اشتقاق عندها نغلق المجال و كذلك القيمة المطلقة

أمثلة :

- **الاشتقاق المركب:**

التابع المركب: ليكن g, f تابعان بحيث f معرف على D_f و $g(x) \in D_f$ مهما يكن $x \in D_g$

عندئذٍ التابع المركب fog هو التابع المعرف بالشكل:

$$x \mapsto (fog) = f(g(x))$$

اشتقاق التابع المركب:

$$(f(u(x))' = u'(x)\, f'(u(x)).$$

مشتق اللي جوا و فتحة على اللي برا

التمرين (1) (نمط امتحاني هام)

ليكن لدينا التابع , $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

$$D = R\backslash\{1\}$$

أ- احسب مشتقه

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

2- استنتج مشتق التابع

$$g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$$

نلاحظ أن:

$$g(x)=f(\sqrt{x})$$

حسب قاعدة الاشتقاق المركب:

$$\Rightarrow g'(x)=f'(\sqrt{x}).(\sqrt{x})'=\frac{x-2\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)^2}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{x-2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}}$$

التمرين (2)

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$$

احسب $f'(x)$ ثم استنتج مشتق التابع $h(x)=f(\sin x)$, $g(x)=f(\sqrt{x})$

التمرين (3)

لدينا التابع $f(x)=\frac{x+1}{x}$

1- احسب $f'(x)$

2- استنتج مشتق التابع $f(f(x))$

التمرين (4)

ليكن التابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$

1- عين $f'(x)$

2- نرمز بالرمز g للتابع المعرف على $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ وفق $g(x)=f(sinx)$. أثبت أن g

اشتقاقي على I ثم احسب $g'(x)$ على I

3- نرمز بالرمز h للتابع المعرف على $J=]1,+\infty[$ وفق $h(x)=f(\sqrt{x})$

٤- أثبت أن h اشتقاقي على J ثم أوجد $h'(x)$ على J

لإيجاد قيمة تقريبية للعدد $f(a+h)$ باستخدام التقريب التآلفي :

١- نفرق المضمون إلى مجموع عددين:

الأول: a سهل الحساب

الباقي : h

٢- نشتق التابع f

٣- نعوض في القانون:

$$f(a+h) \approx hf'(a) + f(a)$$

مثال: ليكن $f(x) = \frac{x}{x+1}$, جد قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$

١- النمط الأول : ما عدد حلول المعادلة $f(x) = m$:

- في حالة الجدول : نراقب عدد مرات مرور السهم من m
- في حالة الرسم : نرسم مستقيماً أفقياً $y = m$ و نراقب عدد نقاط تقاطع c معه

٢- النمط الثاني أثبت أن للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً على المجال I :

- نراقب المجال الذي يكون عليه f ماراً من m
- نذكر شروط المبرهنة :

أ- f مستمر و مطرد تماماً على المجال الفوقاني

ب- المجال التحتاني $= \left($ المجال الفوقاني $\right) f \in m$

٣- النمط الثالث :حساب صورتين والتأكد أن جداؤهما سالب فنستنتج وجود حل للمعادلة $f(x) = 0$

٤- النمط الرابع : ناقش حسب قيم m حلول المعادلة : تمرير مستقيم

التمرين (1)

ليكن $g(x) = e^x + 2 - x$

1- ادرس اطراد $g(x)$

2- استنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$

التمرين (2)

أثبت أن $\ln(x+1) \leq \sqrt{x+1}$ مهما يكن $x > -1$

المسألة 1 :

أولاً : ليكن g التابع المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق : $g(x) = x^2 + lnx - 1$

1- ادرس تغيرات g و نظم جدولاً بـ

2- أثبت أن $\alpha = 1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

ثانياً : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ بالشكل

: $f(x) = x + 1 - \frac{lnx}{x}$

1- احسب نهايات f عند أطراف المجال و فسر النتيجة هندسياً

2- أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج جدول تغيرات f

3- عين القيمة الحدية للتابع f و استنتج معادلة المماس الأفقي لـ C

4- أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x + 1$ مقارب مائل للخط C ثم ادرس الوضع النسبي

5- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم C

المسألة 2 :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = x - 1 - \frac{lnx}{x^2}$$

و g التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$g(x) = x^3 - 1 + 2lnx$$

1- ادرس تغيرات g

2- احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

3- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

4- أثبت أن $d: y = x - 1$ مقارب للخط c_f ثم ادرس الوضع النسبي لهما

5- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم c_f

6- استنتج الخط البياني للتابع h المعرف وفق :

$$h(x) = -x + 1 + \frac{lnx}{x^2}$$

7- ناقش حسب قيم m حلول المعادلة

$$f(x) = m$$

المسألة 3 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + x(lnx)^2$$

وليكن التابع g المعرف وفق:

$$g(x) = (lnx + 1)^2$$

والمطلوب:

1- أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$.

2- أثبت أن $f'(x) = g(x)$.

3- حل المعادلة $g(x) = 0$.

4- نظم جدول تغيرات f.

5- اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x = \frac{1}{e}$ وارسم المماس Δ وارسم C

المسألة 4:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{2x}{e^x}$

1- جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه و اكتب معادلة المقارب الأفقي.

2- ادرس تغيرات التابع f.

3- في معلم متجانس ارسم الخط C.

4- احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x = 1$.

5- استنتج رسم الخط C_1 للتابع g وفق:

$g(x) = 2xe^x$.

المسألة 5 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$

والمطلوب:

1- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي.

2- أثبت ان $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$

3- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الجدية مبيناً نوعها.

4- ارسم C في معلم متجانس.

5- استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع g المعرف وفق:

$g(x) = (x - 1)^2e^x$

6- جد مجموعة تعريف التابع:

$h(x) = ln(f(x))$

المسألة 6 :

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = e^{-x}(1 + ln(x))$$

والتابع g المعرف على I وفق:

$$g(x) = \frac{1}{x} - 1 - ln\, x$$

المطلوب:

1- ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.

2- بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً α, ثم تحقق أن $\alpha = 1$.

3- جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

4- أثبت أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

5- مستفيداً من تغيرات التابع g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

6- في معلم متجانس ارسم الخط C_f.

المسألة ٦:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = e^{-2x} + 2x - 2$$

المطلوب:

1- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x - 2$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C و Δ.

3- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها, ثم بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ حذرين في $\mathbb{R}$ أحدهما ينتمي للمجال $[-1, 0]$.

4- ارسم Δ و C, ثم احسب مساحة السطح المحصور بين محور التراتيب و C و Δ والمستقيم $x = 1$.

5- استنتج الخط البياني C' للتابع g المعرف وفق:

$$g: x \mapsto -e^{-2x} + 2x + 2$$

المسألة ٨

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, 1[$ وفق:

$$f(x) = e^x + \ln(1 - x)$$

وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x) = (1 - x)e^x - 1$$

المطلوب:

1- ادرس اطراد التابع g واستنتج أن $g(x) \leq 0$ مهما تكن $x \in \mathbb{R}$.

2- تحقق أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x-1}$ على المجال $]-\infty, 1[$, ثم ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3- اكتب معادلة المستقيم المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$.

4- في معلم متجانس ارسم المستقيم T, ثم ارسم C الخط البياني للتابع f.

مسألة 9:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]-2, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = (x+1)\ln(x+2)$$

وليكن g التابع المعرف على I وفق:

$$g(x) = \frac{x+1}{x+2} + \ln(x+2)$$

1- جد نهاية التابع f عند أطراف المجال I.

2- أثبت أن $f'(x) = g(x)$ واكتب معادلة المماس Δ للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x = -1$.

3- ادرس اطراد التابع $g(x)$ واستنتج اشارته (مستفيداً من نقطة التماس)

4- نظم جدولاً بتغيرات التابع f وارسم خطه البياني ومقاربه الشاقولي.

5- استنتج اطراد المتتالية $u_n = \ln(n+2)^{n+1}$ أيا كان n العدد الطبيعي.

شغف الرياضيات

حول الصفات التناظرية للتوابع		
الزوجي	**الفردي**	**مركز التناظر**
الشرط الأول: $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ **الشرط الثاني:** $f(-x) = f(x)$ $\Rightarrow f(-x) - f(x) = 0$	**الشرط الأول:** $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ **الشرط الثاني:** $f(-x) = -f(x)$ $\Rightarrow f(-x) + f(x) = 0$	**الشرط الأول:** $x \in D_f \Rightarrow 2a - x \in D_f$ **الشرط الثاني:** $f(x) + f(2a - x) = 2b$
الخطوات: **1- إثبات الشرط الأول:** - ننطلق من $x \in D_f$ - نضرب الطرفين بناقص **2- إثبات الشرط الثاني:** نأخذ $f(-x)$ ونصلح لنصل إلى $f(x)$ c_f متناظر بالنسبة لمحور التراتيب	**الخطوات:** **1- إثبات الشرط الأول:** - ننطلق من $x \in D_f$ - نضرب الطرفين بناقص **2- إثبات الشرط الثاني:** نأخذ $f(-x)$ ونصلح لنصل إلى $-f(x)$ c_f متناظر بالنسبة للمبدأ	**الخطوات:** **1- إثبات الشرط الأول:** - ننطلق من $x \in D_f$ - نضرب بناقص - نضيف $2a$ **2- إثبات الشرط الثاني:** - ننطلق من طرف للوصول للآخر
Hero's idea	التابع x^2 زوجي على $\mathbb{R}$ ولكنه ليس زوجي وليس فردي على $[0, +\infty[$	

المسألة 1

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف وفق : $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$

1- احسب نهايات f عند أطراف D_f

2- جد معادلة المقارب المائل للخط C ثم ادرس الوضع النسبي

3- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

4- أثبت أن $A(-1,-2)$ مركز تناظر للخط C

5- ارسم

المسألة2:

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{2}{e^{2x}+1} + x$

1- أثبت أن d_1 الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

2- أثبت أن d_2 الذي معادلته $y = x + 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

3- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

4- أثبت أن $A(0,1)$ مركز تناظر للخط C

5- اكتب معادلة المماس T في النقطة A للخط C و ادرس الوضع النسبي لـ C مع T

6- ارسم في معلم متجانس كلاً من d_1 و d_2 و T ثم ارسم C

المسألة 3

ليكن $f(x) = \frac{3e^x-1}{e^x+1}$

1- أثبت أن $f(x) + f(-x) = 2$

2- استنتج أن $I(0,1)$ مركز تناظر للخط c_f

3- ادرس تغيرات f و اذكر ماله من مقاربات

4- اكتب معادلة المماس في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب ثم ادرس الوضع النسبي.

5- ارسم c_f و ناقش تبعاً لقيم الوسيط m حلول المعادلة $(3-m)e^x - 1 - m = 0$

المسألة 4

ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1- أثبت أن f فردي

2- ادرس تغيرات f على المجال $[0, +\infty[$

3- أثبت أن $y = x + 1$ مقارب مائل عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي

4- ارسم C على R

حول تعيين الثوابت	
صيغ متكافئة	١- نعطى صيغتين إحداهما معلومة و الأخرى تشتمل على ثوابت يُطلب تعيينها ٢- نصلح إحدى الصيغ (بنشرٍ أو قسمة اقليدية أو توحيد مقامات) و نطابق الصيغتين
الاستفادة من معلومات	معطيات عددها يساوي عدد المجاهيل و يوضح الجدول الآتي كيف نترجم كلاً من المعطيات إلى عبارة رياضية سيتم طرحها فيما يلي
المعطى	**العلاقة المكافئة**
الخط البياني للتابع يمر من نقطة $A(x_0,y_0)$ أو النقطة $A(x_0,y_0)$ تنتمي للخط البياني	بما ان النقطة تنتمي للخط البياني فإن : $f(x_0)=y_0$
الخط البياني يقبل مماساً ميله m في النقطة التي فاصلتها x_0	من عبارة الميل : $f'(x_0)=m$
الخط البياني للتابع يقبل مماساً ميله m في نقطة منه $A(x_0,y_0)$	هنا لدينا معلومتين : ١- النقطة A تنتمي للتابع إذن : $f(x_0)=y_0$ ٢- الميل عند A هو m $f'(x_0)=m$ تذكر إذا ذكر أن المماس أفقي فإن $m=0$
للتابع قيمة حدية عند x_0	بما أنها قيمة حدية فهي تعدم المشتق : $f'(x)=0$

للتابع قيمة حدية عند x_0 مساوية لـ y_0	هنا لدينا معلومتين : $f'(x_0)=0$ $f(x_0)=y_0$
للتابع مماساً معادلته $y=mx+p$ عند x_0	هنا نملك معلومتين: $f'(x_0)=m$ ويمكننا حساب تراتيب نقطة التماس من خلال تعويض x_0 في معادلة المماس فنحصل على y_0 ليكون: $f(x_0)=y_0$

١- ليكن f التابع المعرف على $[0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{a\sqrt{x}}{x+b}$ حيث a, b عددين حقيقين مغايرين للصفر فإذا علمت أن الخط البياني لهذا التابع يقبل مماساً أفقياً معادلته $y=-1$ في النقطة التي فاصلتها $x=1$ فإن قيمة id : a, b,

٢- قيمة a التي تجعل التابع f المعرف وفق $f(x)=ax^3+3x^2-3x$ يقبل قيمة حدية عند $x=0$ هي:

٣- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x)=\frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$ فإن قيمتي a, b لكي يقبل التابع مماساً في النقطة $x=0$ معادلته $y=4x+3$ هي :

٤- ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=sinx+ax$ عندئذٍ قيمة الثابت a التي تجعل له قيمة حدية عند $x=\frac{\pi}{3}$

٥- ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{2x^2+ax+b}{x+1}$ a) و b) عددان حقيقان) عندئذٍ الثنائية المناسبة (a,b) لكي تكون $f(1)=5$ قيمة حدية محلياً

٦- ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{-1,2\}$ وفق $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$ عندئذٍ الثلاثية (a,b,c) التي تحقق أن :

$f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$ هي :

٧- ليكن f التابع المعرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=ax+bx\sqrt{x}$ عندئذٍ قيمة a,b ليكون للتابع قيمة حدية عند الواحد مساويةً لـ (-1)

8- ليكن f التابع المعرف و الاشتقاقي على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2+ax+b}$ حيث $a,b\in$ عندئذٍ قيمة كلٍ من العددين a,b $f(-2)=2$ قيمة حدية محلياً :

9- C_f الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ عندئذ C_f يقبل مماساً أفقياً وحيداً إذا كان:

■ المعادلات التفاضلية

- **النمط الأول: حل المعادلات التفاضلية التي من الشكل $y'=ay+b$**

1- قانون الحل : $y=ke^{ax}-\frac{b}{a}$

2- إذا وجد شروط ابتدائية نستفيد منها لحساب k

التمرين (1)

$y'=2y$ والحل f يحقق الشرط أن $f(0)=1$

$$y'=2y$$

$$y'=ay$$

$$\Rightarrow y=ke^{ax}\Rightarrow y=ke^{2x}$$

بما أن $f(0)=1\Leftarrow$ النقطة $(0,1)$

تحقق المعادلة

$$1=ke^{2(0)}\Rightarrow \mathrm{k}=1$$

فالحل المطلوب

$$y=e^{2x}$$

التمرين (2)

جد حل المعادلة التفاضلية $y'+5y=0$ والخط البياني C للحل يمر من النقطة $A(-2,1)$

التمرين (3)

جد حل المعادلة التفاضلية $y' + 2y = 0$ و ميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$

- **النمط الثاني : الحل معلوم :**

مثال: عين قيمة λ ليكون التابع:

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

حل للمعادلة التفاضلية :

$$y' + y = \lambda e^{-x}$$

الحل

$$y = f(x) = (x+2)e^{-x}$$
$$y' = e^{-x} - e^{-x}(x+2)$$
$$y' = e^{-x}(1 - x - 2)$$
$$y' = e^{-x}(-x-1)$$

نعوض في المعادلة :

$$e^{-x}(-x-1) + (x+2)e^{-x} = \lambda e^{-x}$$
$$e^{-x} = \lambda e^{-x}$$
$$\lambda = 1$$

سؤال دورة 2024:

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية $E: y' + 2y = -4x + 6$:

١- عين العددين a, b حتى يكون التابع $f(x) = ax + b$ حلاً للمعادلة E

٢- جد حلول المعادلة $y' + 2y = 0$

٣- أثبت أن التابع $h(x) = ke^{-2x} + f(x)$ حل للمعادلة E

حول مشتقات من مراتب عليا

1- ترميز:

$$f''(x) = f^{(2)}(x)$$
$$f'''(x) = f^{(3)}(x)$$

وهكذا يكون رمز المشتق من المرتبة n هو:

$$f^{(n)}(x)$$

2- إن:

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]'$$

3- أنصحك بحفظ أن المتتالية:

$$1,1,2,6,24 \ldots = 0!,1!,2!,3!,4! \ldots$$

4- إن التناوب بالإشارة يعبّر عنه بصيغتين:

a- **إذا كان أول حد موجباً** $(-1)^{n+1}$ **حيث** $n \geq 1$

b- **إذا كان أول حد سالباً** $(-1)^{n}$ **حيث** $n \geq 1$

5- في المشتقات من مراتب عليا نقبل أن:

$$[\sin(wx)]' = w\sin\left(wx + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$[\cos(wx)]' = w\cos\left(wx + \frac{\pi}{2}\right)$$

وعليه يكون:

$$[\sin(wx)]^{(n)} = w^n \sin\left(wx + n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$[\cos(wx)]^{(n)} = w^n \cos\left(wx + n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

شغف الرياضيات

تمرين : ليكن $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

1- تحقق أن $\sqrt{1+x^2}f'(x) = f(x)$

2- استنتج أن $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$

تمرين : ليكن $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$:

1- عين a, b **ليكون** $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

2- استنتج المشتق من المرتبة n

تمرين : ليكن $f(x) = \ln(1-x)$

١- جد المشتقات حتى المرتبة الثالثة

٢- أثبت بالتدريج أن : $f^{(n)}(x)=\frac{-(n-1)!}{(1-x)^n}$

التفسير الهنصي للاشتقاق

■ التفسير الهندسي للعدد المشتق $f'(a)$ هو ميل المماس عند النقطة التي فاصلتها a

حول معادلة المماس	
ملاحظة	يجب التفريق دوماً بين معلومتين: ١- نقطة التماس: هي النقطة التي وقع فيها تماس بين مستقيم (المماس) والخط البياني للتابع ٢- نقطة يمر منها المماس: هي عبارة عن نقطة تنتمي لمعادلة المماس فقط وليس من الضروري أن تكون تنتمي للخط البياني للتابع
قانون معادلة المماس	$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$
الحالة (١)	معادلة مماس عُلم فاصلة نقطة التماس a: ١- نحسب $f(a)$ و$f'(a)$ ٢- نعوض في قانون معادلة المماس
الحالة (٢)	معادلة مماس عُلم تراتيب نقطة التماس $f(a)$: ١- نضع $f(x)=f(a)$ ٢- نعزل لنصل لـ $x=a$ ٣- نحسب $f'(a)$ ٤- نعوض في قانون معادلة المماس

الحالة (3)	معادلة مماس عُلم ميله $f'(a)$: 1- نضع $f'(x) = f'(a)$ 2- نعزل لنصل لـ $x = a$ 3- نحسب $f(a)$ 4- نعوض في قانون معادلة المماس
الحالة (4)	معادلة مماس عُلمت معادلة مستقيم موازي له $y = mx + p$: 1- نسرق الميل m 2- نضع $f'(x) = m$ 3- نعود للحالة (3)
الحالة (5)	معادلة مماس عُلمت معادلة مستقيم معامداً له $y = m'x + p$: 1- نحسب ميل المماس المطلوب من القانون $m = -\frac{1}{m'}$. 2- نضع $f'(x) = m$. 3- نعود للحالة (3)
الحالة (6)	معادلة مماس في النقطة التي فاصلتها تعدم المشتق الثاني: 1- نشتق مرتين لنصل لـ $f''(x)$ 2- نضع $f''(x) = 0$ 3- نعزل لنصل لـ $x = a$ 4- نحسب $f'(a)$ و $f(a)$
الحالة (7)	معادلة المماس في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب: 1- نضع $x = 0$

	2- نعود للحالة (1)
الحالة (8)	معادلة المماس في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل: 1- نضع $f(x)=0$ 2- نعزل لنصل لـ $x=a$ 3- نعود للحالة (2)
الحالة (9)	معادلة المماس الأفقي للتابع: 1- نضع $f'(x)=0$ 2- نعود للحالة (3)
الحالة (10)	معادلة المماس الشاقولي للتابع: تكون فقط عندما تكون نهاية معدل التغير لانهائية: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ وتكون معادلة المماس الشاقولي هي $x=a$
الحالة (11)	معادلة نصف المماس اليميني واليساري: $y_1=f'(a^+)(x-a)+f(a)$ $y_2=f'(a^-)(x-a)+f(a)$ ويكونان فقط عندما يكون المشتق من اليمين عند a لا يساوي المشتق من اليسار عند a

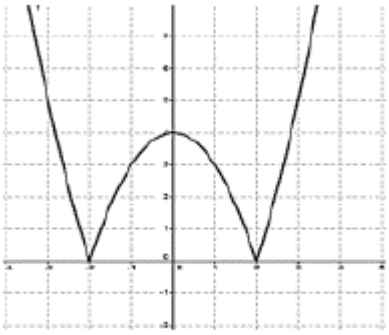
الخطوط البيانية

عن مجموعات التعريف

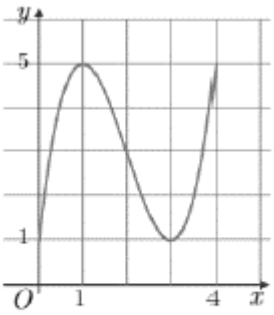
لإيجاد مجموعة تعريف تابع من خطه البياني نميز حالات:

1- **الحالة الأولى:** إذا كان منحني التابع خط وحيد ومستمر (لا يحوي انقطاع):

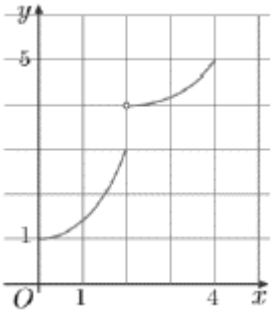
عندئذ تكون مجموعة التعريف من فواصل أقصى نقطة اليسار (أو $-\infty$) إلى فواصل أقصى نقطة من اليمين (أو $+\infty$).



$D_f =]-\infty, +\infty[$



$D_f = [0,4]$

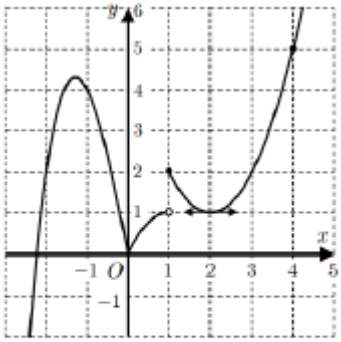


$D_f = [0,2] \cup]2,4]$

$D_f = [0,4]$

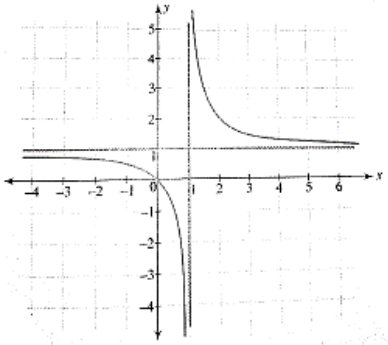
2- **الحالة الثانية:** المنحني عبارة عن اجتماع أكثر من خط.

نوجد مجموعة تعريف كل فرع لوحده ثم نضع بينها اجتماعات وتجدر الإشارة هنا أن التابع سيكون عبارة عن خطين يفصل بينهما إما مقارب شاقولي (وعنده يكون

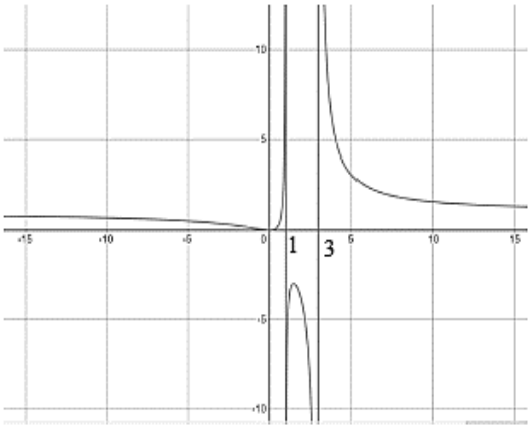


$D_f =]-\infty, 1[\cup [1, +\infty[$

$D_f =]-\infty, +\infty[$



$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$



$D_f =]-\infty, 1[\cup]1,3[\cup]3, +\infty$

المجال دائماً مفتوح) أو نقطة انقطاع (وعندها نفتح المجال عن النقطة المفتوحة) ونغلقه عند النقطة المغلقة.

عن النهايات

عندما نجد سؤالاً يطلب فيه نهايات يفضل أن نكتب ما نجده من مقاربات قبل البدء فمثلاً:

إذا وجدنا $y=1$ مقارب أفقي عند $+\infty$ فهذا يعطينا معلومة أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

وإذا وجدنا أن $\underbrace{x=2}_{x\to 2}$ مقارب شاقولي عند $\underbrace{+\infty}_{\lim f(x)=+\infty}$ (نحو الأعلى) وC يقع على يمين مقاربه $\underbrace{\qquad}_{x\to 2^+}$

وبذلك نتمكن من الإجابة عن أسئلة النهايات وعن أسئلة تعيين المقاربات.

مثال:

هنا لدينا :

$y=1$ مقارب أفقي عند $+\infty$ و عند $-\infty$ بالتالي

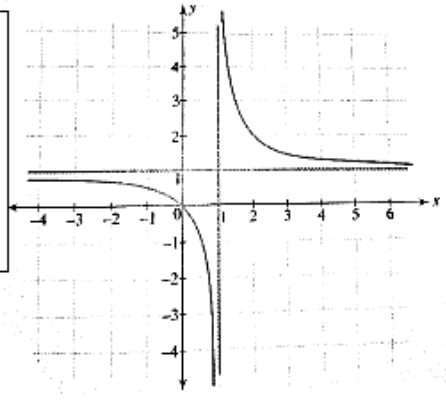
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

$x=1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ على اليمين :

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

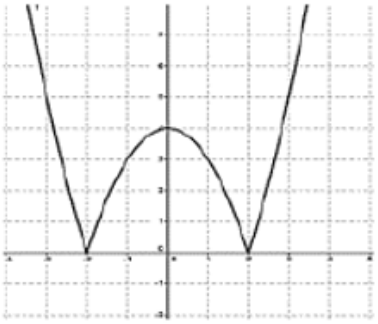
$x=1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و على اليسار :

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$



ملاحظة: إذا كان التابع لا يملك مقاربات فغالباً يكون الجواب $+\infty$ (نحو الأعلى) و $-\infty$ (نحو الأدنى).

مثال2:



هنا نلاحظ أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

عن المقارب المائل

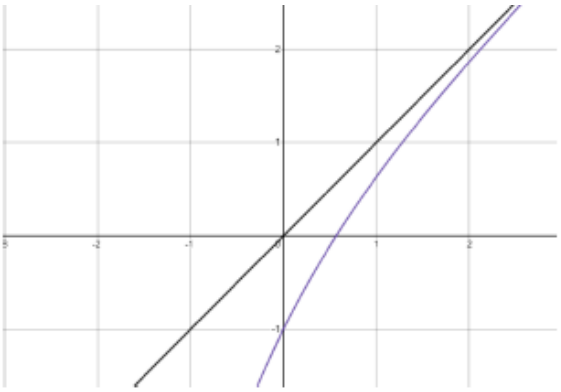
1- عندما يطلب حساب $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$:

فيجب أن تتذكر أن هذه النهاية تساوي أمثال x في معادلة المقارب المائل (أي تمثل ميله) وعليه يكون:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a = m_{\text{المقارب}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ نقاط يمر منها المقارب يمكن إيجادها من الرسم.

مثال1:



هنا نلاحظ أن المستقيم المرسوم مقارب مائل في جوار $+\infty$

و بالتالي عندما يطلب $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ فهو يريدنا أن نحسب ميله

و نلاحظ أن المستقيم هنا يمر من $A(0,0)$ و $B(1,1)$

و بالتالي :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m_d = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

2- إذا طلب إيجاد معادلة المقارب المائل:

أ- نوجد الميل من القانون:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ب- نطبق قانون معادلة المستقيم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ففي المثال السابق:

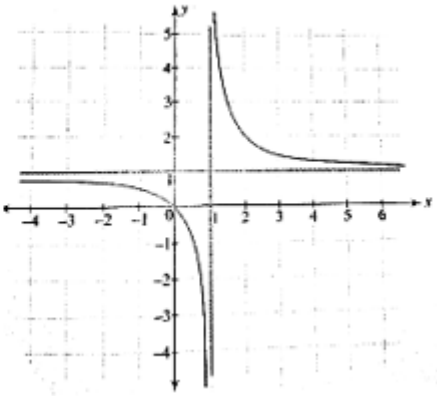
$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$$

عن الاشتقاق

أ- قابلية الاشتقاق:

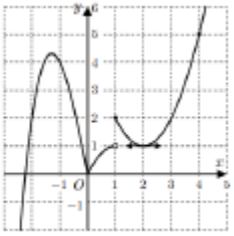
يكون f غير قابل للاشتقاق عند نقطة a في الحالات الآتية:

أ- إذا كانت a لا تنتمي لمجموعة التعريف.



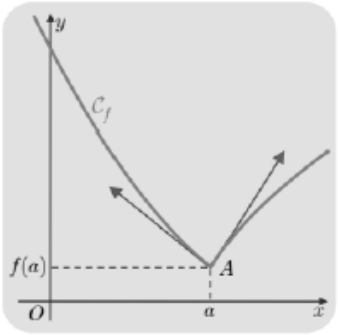
هنا f غير اشتقاقي عند $x = 1$ لأن غير معرف عندها

ب- إذا كانت a تنتمي إلى مجموعة التعريف ولكن f غير مستمر عندها (منقطع).



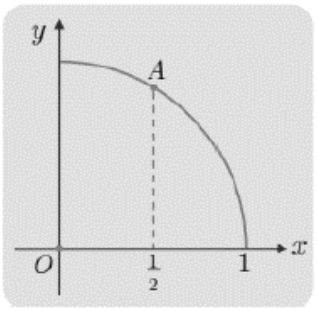
نلاحظ أن f معرف عند $x=1$ لكنه غير مستمر عندها فهو غير اشتقاقي عند $x = 1$

ت- إذا كان التابع يقبل نصفي مماس عند a (منكسر).



نلاحظ أن f يقبل نصفي مماس عند $x = a$ فهو غير اشتقاقي عند $x = a$

ث- إذا كان التابع يقبل مماساً شاقولياً عند a (يكون التابع مغلق عند طرفه):



f غير اشتقاقي عند $x = 1$ لأنه يقبل مماساً شاقولياً عند $x = 1$

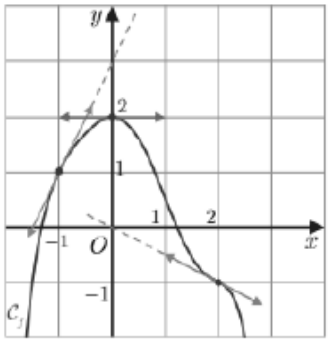
2- حساب $f'(a)$ نميز حالتين هنا:

أ- عند a يوجد للتابع مماس افقي (أو قيمة حدية): عندها $f'(a) = 0$ مباشرةً.

ب- عند a يوجد مماساً مائلاً عندها يكون $f'(a) = m_{\text{المماس}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ولإيجاد معادلة المماس نطبق قانون معادلة المستقيم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



حساب $f'(0)$: نلاحظ أن f يقبل مماساً أفقياً عند $x = 0$ و بالتالي $f'(0) = 0$
لكن $f(0) = 2$ (تصوير)
معادلته :

$$y - 2 = 0(x - 0)$$
$$y = 2$$

حساب $f'(-1)$: نلاحظ أن f يقبل مماساً مائلاً عند $x = -1$ و هذا المماس يمر من النقطتين :
$A(0,3)\ , B(-1,1)$
و بالتالي :

$$f'(-1) = \frac{1-3}{0-(-1)} = -2$$

معادلته : $y - 3 = -2(x - 0)$

$$y = -2x + 3$$

حساب $f'(2)$: نلاحظ أن f يقبل مماساً مائلاً عند $x = 2$ و هذا المماس يمر من النقطتين :
$A(0,0)\ , B(2,-1)$
و بالتالي :

$$f'(2) = \frac{-1-0}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

معادلته:

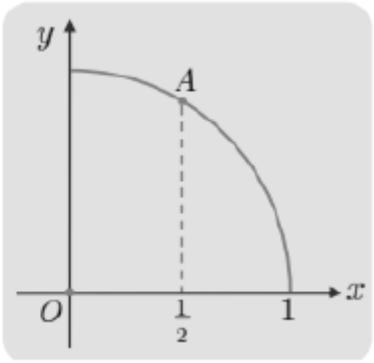
$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$
$$y = -\frac{1}{2}x$$

مثال:

3- القيم الحدية:

الأمر سهل هنا لكن مع ملاحظة أنه قد يكون هناك قيم حدية على **أطراف المجال**

كما يلي:

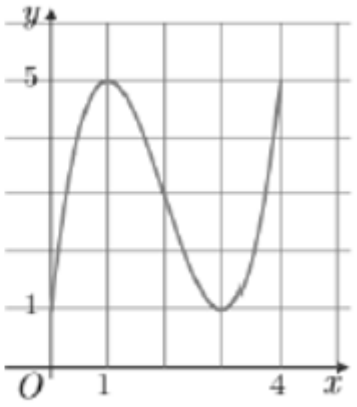


هنا $f(1)=0$ قيمة حدية صغرى و $f(0)$ قيمة حدية كبرى

(لم نضع تراتيبها لأنها غير مكتوبة على الرسم)

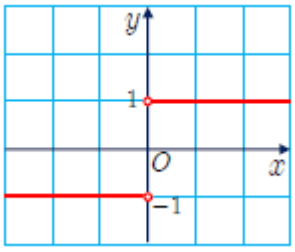
٤- المتراجحات $f'(x)>0$ تعني متى يكون التابع متزايد (على أي مجال؟).

المتراجحات $f'(x)<0$ تعني متى يكون التابع متناقص (على أي مجال؟).



$f'(x)<0 \rightarrow S=]1,3[$
لأنه متناقص على هذا المجال
أما:
$f'(x)>0 \rightarrow S=]0,1[\cup]3,4[$
لأنه متزايد على كل من هذين المجالين

تمرين ١ في الشكل المجاور C_f الخط البياني للتابع f المعرف وفق:



$f(x)=1\,;x>0$ و $f(x)=-1\,;x<0$:

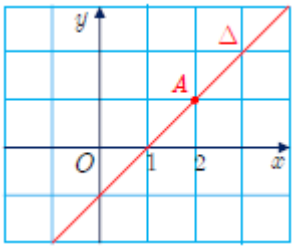
١- ما هي مجموعة تعريف f؟

٢- هل f اشتقاقي عند $a=1$؟

٣- أوجد المستقر الفعلي للتابع f.

٤- أي من قواعد الربط الآتية تتفق مع التابع f:

$f(x)=x\|x\|$	a	$f(x)=\frac{\|x\|}{x-1}$	c	$f(x)=\frac{x^2+\|x\|}{x^2+1}$	b	$f(x)=\frac{\|x\|}{x}$	d



تمرين 2 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[-2,4]$ وفق $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$. عين a و b علماً بأن المستقيم Δ المرسوم في الشكل المجاور مماس للخط C في النقطة A. تحقق أن التابع الذي وجدته ينسجم مع مضمون النص.

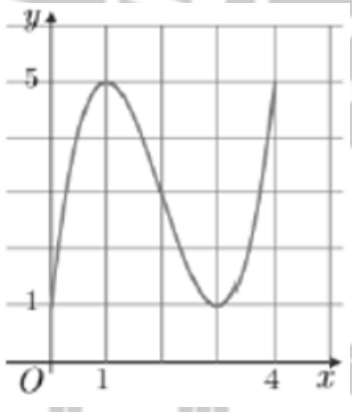
تتمات في الخطوط البيانية

أ- حلول المعادلة $f(x)=k$:

متى يقطع التابع المستقيم الأفقي $y=k$ وهناك عدة أسئلة:

أ- ما عدد الحلول: أي كم حل (حل وحيد، حلان، ثلاث حلول ....)

ب- ما هي حلول: هنا يجب كتابة فاصلة نقطة التقاطع (.... x_1 , x_2)

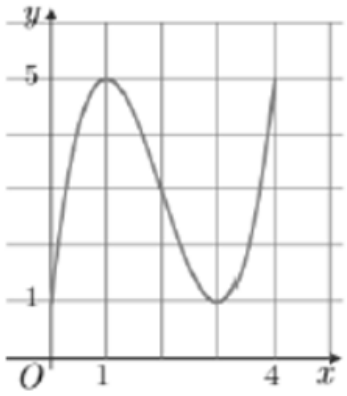


مثال:

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=3$: ثلاث حلول.

ماهي حلول المعادلة $f(x)=1$: الحلول هي:

$$x_1=0\,,x_2=3$$



مثال2:

ناقش حسب قيم m حلول المعادلة $f(x)=m$.

الحل:

$$f(x)=m\begin{cases} m\in]-\infty,1[& \text{لا يوجد حلول} \\ m=1 & \text{حلان} \\ m\in]1,5[& \text{ثلاث حلول} \\ m=5 & \text{حلان} \\ m\in]5,+\infty[& \text{لا يوجد حلول} \end{cases}$$

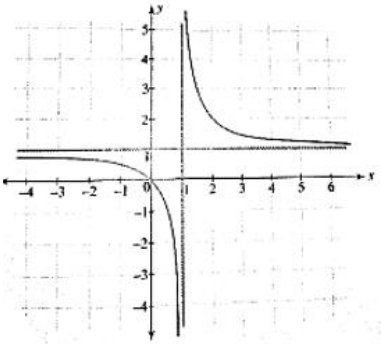
مررنا مستقيماً افقياً من أسفل الرسمة إلى أعلى الرسمة وراقبنا عدد مرات تقاطع المستقيم الافقي مع المنحني.

2- حل المتراجحات من الشكل:

$$f(x)>m\ ,f(x)<m\ ,f(x)\leq m\ ,f(x)\geq m$$

أي متى يكون التابع فوق أو تحت المستقيم الأفقي $y=m$ ويكون حلها مجال.

مثال:



ما هي حلول المتراجحة $f(x) > 1$: **الحلول هي** $]1, +\infty[$

أخذنا المجال الذي يكون عليه $f(x)$ **فوق المستقيم** $y = 1$.

3- تصوير مجال:

ونميز الحالات الآتية:

أ- **التابع متزايد: فتكون صورة المجال** $[a, b]$ **هي** $[f(a), f(b)]$ **مع المحافظة على شكل المجالات.**

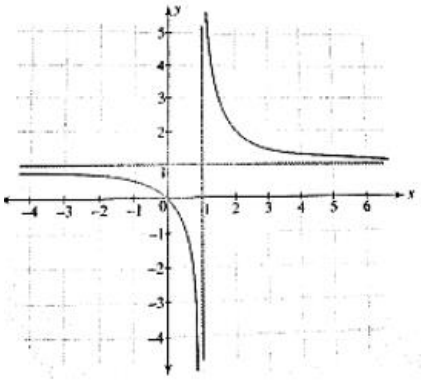
ب- **التابع متناقص: فتكون صورة المجال** $[a, b]$ **هي** $[f(b), f(a)]$ **مع المحافظة على شكل المجالات.**

ت- **التابع غير مطرد: نسقط القطعة من التابع التي على المجال** $[a, b]$ **على محور** yy' **ونحدد المجال المطلوب.**

ملاحظة هامة: في الحالة الأخيرة عندما نسقط المنحني على محور yy' **نحصل على مجال ما طرفيه (وايات أدنى نقطة إلى وايات أعلى نقطة)**

إذا كانت هذه الوايات تقابل نقطة تنتمي إلى المجال المعطى نغلق المجال.

إذا كانت هذه الوايات تقابل نقطة لا تنتمي إلى المجال المعطى نفتح المجال.



مثال1:

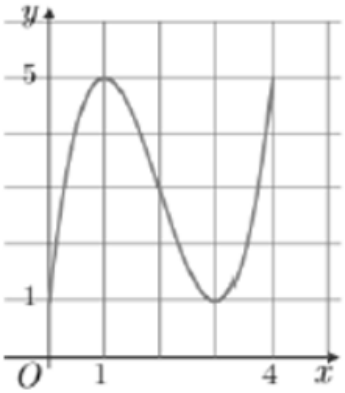
$$f(]-\infty,1[) =]-\infty,1[$$

قمنا بتصوير الفرع المقابل للمنحني على المجال $]-\infty,1[$ فنلاحظ أن مسقطه على محور التراتيب يغطي القيم $]-\infty,1[$.

$$f(]1,+\infty[) =]1,+\infty[$$

قمنا بتصوير الفرع المقابل للمنحني على المجال $]1,+\infty[$ فنلاحظ أن مسقطه على محور التراتيب يغطي القيم $]1,+\infty[$.

مثال2:



$$f([0,1]) = [1,5]$$

$$f(]0,1[) =]1,5[$$

حافظنا على شكل المجالات لأن التابع متزايد.

$$f([1,3]) = [1,5]$$

$$f(]1,3[) =]1,5[$$

حافظنا على شكل المجالات لأن التابع متناقص.

$$f(]0,3[) =]1,5]$$

أغلقنا المجال عند 5 لأنه يقابل النقطة $x = 1$ وهي تنتمي للمجال $]0,3[$ وفتحنا المجال عند 1 لأنه يقابل النقطتين $x = 0\ ,x = 3$ وكلاهما لا ينتمي للمجال $]0,3[$.

ملاحظة: المستقر الفعلي:

$$f(D_f) = E_f$$

أي صورة مجموعة التعريف كاملة وهي من وايات أدنى نقطة إلى وايات أعلى نقطة.

4- مجموعات تعريف توابع مختلطة:

$$\sqrt{f(x)} \ , \ln(f(x)) \ , \frac{1}{f(x)} \ , \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$$

نضع شرط التعريف الأصلي فنحصل على متراجحة ونعود للحالات السابقة.

مثال:

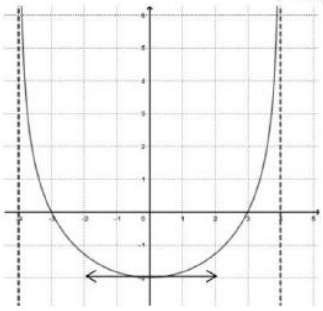
إذا كان $h(x) = \sqrt{f(x)}$ فهو معرف بشرط $f(x) \geq 0$.

إذا كان $g(x) = \ln(f(x))$ فهو معرف بشرط $f(x) > 0$.

إذا كان $l(x) = \frac{1}{f(x)}$ فالحل هو $\mathbb{R}$ ماعدا حلول المعادلة $f(x) = 0$.

دورة 2017 الأولى:

في الشكل المجاور c الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-4,4[$:



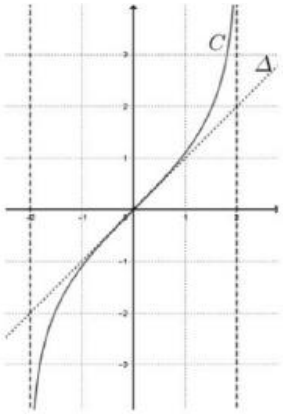
1- احسب $\lim_{x\to 4} f(x)$ و $\lim_{x\to -4} f(x)$ ثم استنتج معادلة كل مقارب.

2- احسب $f(0)$ و $f'(0)$.

3- جد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

4- ما حلول المتراجحة $f'(x) < 0$.

دورة 2017 الثانية:



c الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-2,2[$:

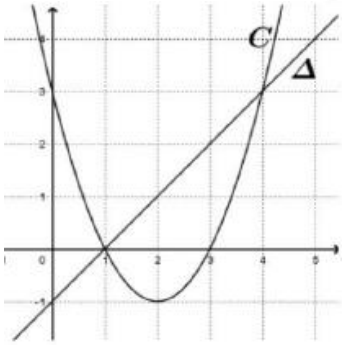
1- احسب $\lim_{x\to 2} f(x)$ و $\lim_{x\to -2} f(x)$.

2- أوجد $f(0)$ و $f'(0)$.

3- هل التابع f فردي أم زوجي؟ برر ذلك.

4- اكتب معادلة المماس Δ.

دورة 2018 الأولى:



ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$:

1- دل على القيم الحدية وبين نوعها.

2- جد $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

3- ماهي حلول المعادلة $f(x)=y_{\Delta}$.

4- اكتب معادلة Δ.

5- ناقش حسب قيم m حلول المعادلة $f(x)=m$.

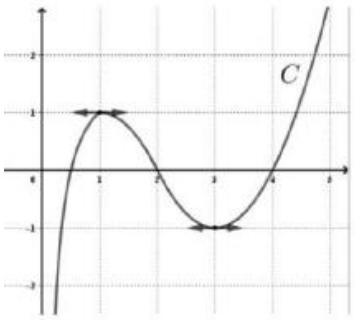
6- ارسم الخط البياني للتابع g المعرف وفق $g(x)=f(x)+1$.

7- ارسم الخط البياني للتابع h المعرف وفق $h(x)=|f(x)|$.

8- ارسم الخط البياني للتابع k المعرف وفق $k(x)=f(x+1)$.

9- ارسم الخط البياني للتابع l المعرف وفق $l(x)=f(x+1)+1$.

دورة 2019 الثانية:



ليكن c الخط البياني للتابع المعرف على المجال $]0,+\infty[$:

1- احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- دل على القيم الحدية مبيناً نوعها.

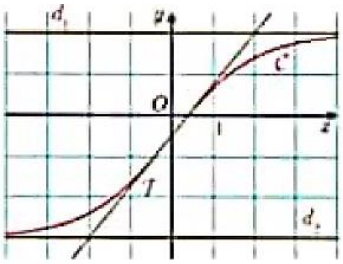
3- جد حلول المتراجحة $f'(x)\leq 0$.

4- جد $f([1,3])$.

5- اكتب معادلة كل مماس افقي للتابع.

نموذج وزاري 2019:

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمستقيمين d_1 و d_2 مقاربين للخط c والمستقيم T مماس للخط c:



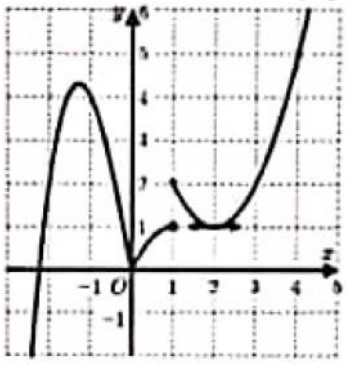
1- احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- اكتب معادلة كلاً من d_1 و d_2.

3- إذا علمت أن المستقيم T يمس المنحني في النقطة $A\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ احسب $f'(0)$ ثم اكتب معادلته.

نموذج الوزاري الأول 2017:

نجد جانباً الخط البياني c للتابع المعرف على $\mathbb{R}$:



1- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=5$.

2- ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq 5$.

3- هل $f(1)$ قيمة حدية للتابع؟ علل.

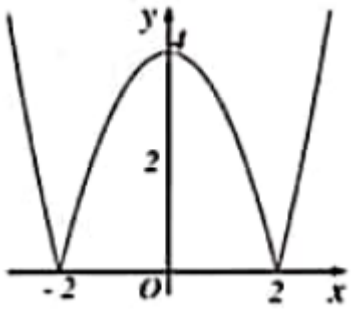
4- ما عدد القيم الحدية للتابع f.

5- ما قيمة المشتق عند $x=2$.

6- أيكون f اشتقاقياً عند الواحد.

نموذج الوزاري الثالث 2017:

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$:



1- كم حلاً للمعادلة $f(x)=2$؟

2- احسب قيمة المشتق عند الصفر واحسب $f(0)$.

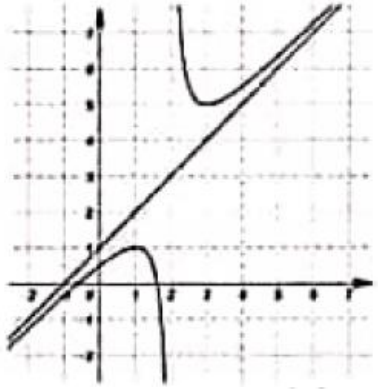
3- عين صورة المجال $[-2,2]$.

4- عين المستقر الفعلي $E_f=f(D_f)$.

5- كم قيمة محلية للتابع؟

6- نظم جدول تغيرات التابع f.

نموذج الوزاري الأول 2020:



ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$:

1- احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- دل على القيم الحدية مبيناً نوعها.

3- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

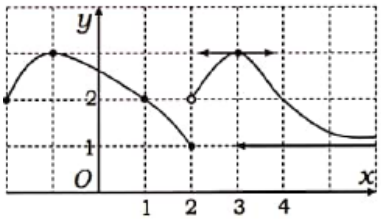
4- احسب نهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

5- اكتب معادلة المقارب المائل للتابع.

6- اكتب احداثيات مركز التناظر للتابع.

نموذج الوزاري الثاني 2020:

ليكن c الخط البياني للتابع f:



1- احسب

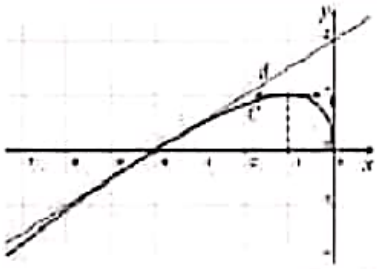
$$\lim_{x\to+\infty}f(f(x)),\ \lim_{x\to+\infty}f(x),\ \lim_{x\to2^-}f(x),\ \lim_{x\to2^+}f(x).$$

2- هل f اشتقاقي عند 2؟

3- جد $f(3)$ و $f'(3)$ ثم معادلة المماس عند $x=3$.

4- ما عدد القيم الحدية للتابع f.

نموذج وزاري الأول 2018:



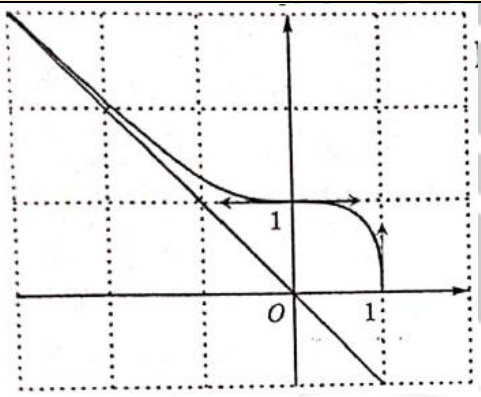
ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, 0]$:

1- اكتب معادلة المماس d والمماس الأفقي ونصف المماس الشاقولي، وفسر لماذا f غير قابل للاشتقاق عند $x = 0$.

2- نظم جدول تغيرات التابع f.

3- ارسم الخط البياني c' للتابع g المعرف وفق $g(x) = -f(-x)$.

أسئلة من بنوك الشغف



السؤال الأول: ليكن الخط البياني C للتابع f المعرف $]-\infty, 1[$ المرسوم بالشكل المجاور:

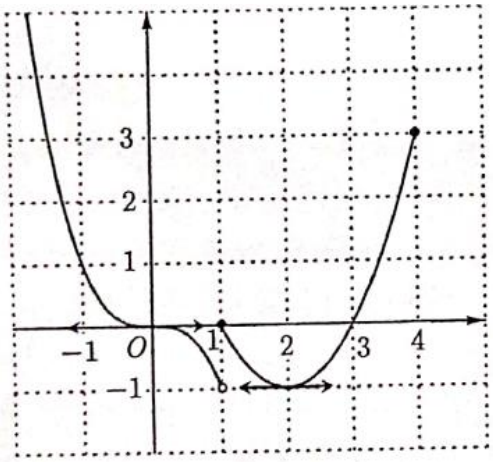
1- احسب $f'(0)$.

2- هل $f(0)$ قيمة حدية محلياً؟ علل إجابتك.

3- أيكون f اشتقاقياً عند $x = 1$؟ علل إجابتك.

4- هل $f(1)$ قيمة حدية محلياً؟

5- احسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.



السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرف على المجال $I =]-\infty, 4]$ خطه البياني C المرسوم في الشكل المجاور:

1- احسب $f'(0)$.

2- هل $f(0)$ قيمة حدية محلياً؟ علل إجابتك.

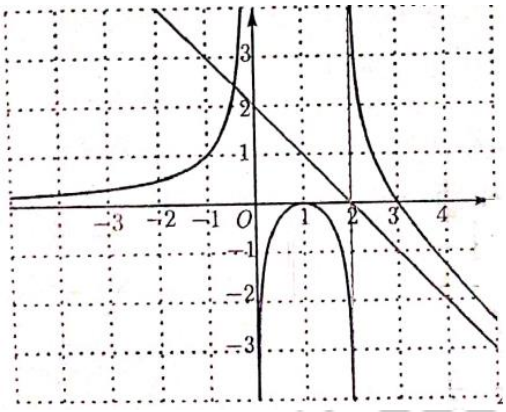
3- أيكون f اشتقاقياً عند $x = 1$؟ علل إجابتك.

4- هل $f(1)$ قيمة حدية محلياً؟

5- دل على القيم الحدية للتابع.

6- ما مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) > 0$؟

السؤال الثالث: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{0,2\}$ ومعادلة مقاربه المائل $y = -x + 2$ وخطه البياني C المرسوم بالشكل المجاور:



1- جد نهاية التابع عند الأطراف المفتوحة في مجموعة تعريفه.

2- اكتب معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي للتابع f.

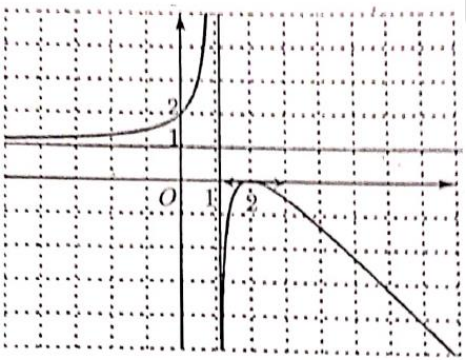
3- احسب كلاً من: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + x - 2)$.

4- ما حلول المعادلة $f(x) = 0$؟

5- ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$؟

6- لنعرف التابع g بالعلاقة: $g(x) = \sqrt{f(x)}$, ما مجموعة تعريف g؟

السؤال الرابع: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ خطه البياني C_f المرسوم في الشكل المجاور:



1- استنتج من الشكل نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- اكتب معادلة كل مقارب افقي أو شاقولي للخط البياني C_f.

3- استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x))$.

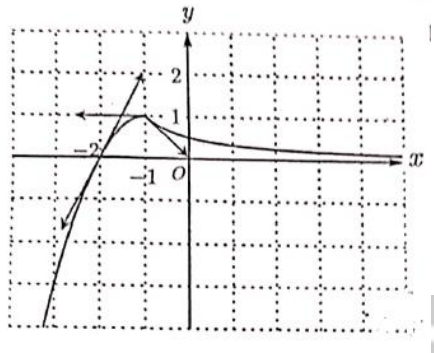
4- ما حلول المعادلة $f(x) = 0$؟

5- ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$ ؟

6- ناقش حسب قيم $m \in \mathbb{R}$ حلول المعادلة $f(x) = m$.

7- استنتج جدول تغيرات التابع f.

السؤال الخامس: نجد جانبا C_f الخط البياني للتابع f المعرف على R



1- جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.
ثم استنتج معادلة مستقيمه المقارب الأفقي لخطه البياني C_f .

2- احسب $\lim_{z \to (-1)^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ وهل f اشتقاقي عند -1 من اليمين؟

3- اكتب معادلة نصف المماس من اليسار للخط C_f في نقطة فاصلتها -1 .وهل f اشتقاقي عند $x = -1$ ؟ علل إجابتك.

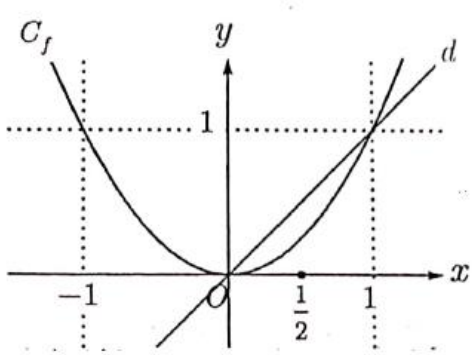
4- جد $f'(-2)$. ولنعرف التابع g بالعلاقة: $g(x) = f(-3x)$ استنتج $g'\left(\frac{2}{3}\right)$

5- ما مجموعة تعريف التابع $h \mapsto \frac{1}{\ln(f(x))}$ ؟ وما حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$ ؟

السؤال السادس: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على R والمرسوم في الشكل المجاور:

شغف الرياضيات

وليكن المستقيم d الذي معادلته: $y = x$



1- احسب $\lim_{z \to +\infty} f(x)$

2- دل على القيمة الحدية محليا مبينا نوعها.

3- ما حلول المعادلة $f(x) = x$ ؟وما حلول المتراجحة $f(x) < x$ ؟

4- هل f تابع زوجي أم فردي؟ علل إجابتك.

5- لنعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ وفق العلاقة التدريجية :

جداول التغيرات

عن مجموعات التعريف

لمعرفة مجموعة تعريف التابع المعطى جدول تغيراته ننظر فقط إلى حقل x ونأخذ القيم من اليسار إلى اليمين مثل:

في الجدول المجاور نجد من حقل x أن التابع معرف على المجال من $-\infty$ إلى $+\infty$, حيث أننا قرأنا المجال من اليسار إلى اليمين.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	$+++++++++$	$+++++$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	

مثال: إن مجموعة تعريف التابع f المعطى جدول تغيراته:

نجد في الجدول المجاور أن التابع f معرف على المجال $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, حيث أننا قرأنا من اليسار إلى اليمين من حقل x ولكن انتبه!!

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$++++$	0 $----$	$---$	0 $+++$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	6 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	-2 ↗	$+\infty$

يوجد هنا قيمة التابع غير معرف عندها لأننا وجدنا $|-1|$ وهذا يعبر عن أن التابع غير معرف عند -1.

مثال: لدينا جدول التغيرات المجاور , عين مجموعة تعريف f:

نلاحظ هنا أنه تم استثناء مجال وليس قيمة (شلمونة عريضة) فتكون مجموعة التعريف هنا هي: $D_f:]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$++++++$		$------$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

تمارين: أوجد مجموعة تعريف التابع f لكل من الجداول الآتية:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$++++++$	$----$	0 $+++++++$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$ $+\infty$ ↘	-1 ↗	0

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+++++++$ 0 $++$ $+++++$		
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-2 ↗	0

.....

.....

.....

عن النهايات

لإيجاد نهاية تابع ما في جدول التغيرات ستكون جهة السعي في حقل x ولكن جواب النهاية هو مقابلها في حقل $f(x)$ مثل:

هنا نجد أن نهاية التابع عند $+\infty$ هي 0 حيث أننا أخذنا جهة السعي من حقل x وجواب النهاية كان من حقل $f(x)$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗

مثال: لدينا هنا:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗		6	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty \,,\ \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$$

انتبه!! عند وجود نهاية من اليمين ومن اليسار للتابع عند قيمة فهنا في حالة القيم من اليمين ننظر للقيمة المقابلة من اليمين مثل عند $(-1)^+$ نظرنا إلى القيمة المقابلة في حقل $f(x)$ من اليمين فوجدنا أنها $+\infty$.

تمارين: عين نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه في كل من الجداول الآتية:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$+\infty$ | $+\infty$	↘	-1	↗	0

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-2	↗		0

.....

عن الاشتقاق

1- عند السؤال عن قابلية الاشتقاق لتابع ما عند a نذهب إلى a في حقل x ونميز الحالات الآتية:

أ- إذا كان التابع غير معرف عند a:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$++++$	0	$----$	‖	$---$	0	$+++$		
$f(x)$	$-\infty$ ↗	6	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-2	↗		$+\infty$

هنا نجد أن التابع غير قابل للاشتقاق عند $a=-1$ لأنه غير معرف عندها.

ب- إذا كان للتابع عند a قيم من اليمين واليسار في حقل $f'(x)$ (شلمونة قصيرة):

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$----$	-2	‖ 2	$++++$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		2	↗	$+\infty$

في جدول التغيرات المجاور نجد أن التابع غير اشتقاقي عند $a=0$ لأن لديه قيم من اليمين وقيم من اليسار عندها **أو** لديه (شلمونة قصيرة).

2- عند السؤال عن $f'(a)$ قيمة المشتق عند a:

سنأخذ هنا قيمة a من حقل x ومقابلها من حقل $f'(x)$ مثل:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$++++++$		‖ $----$	0	$++++++$		
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖ $+\infty$ ↘	-1	↗	0	

في الجدول المجاور نجد أن قيمة $f'(4)$ تساوي 0 حيث أننا أخذنا 4 من حقل x ومقابلها من الحقل $f'(x)$.

3- عند السؤال عن القيم الحدية:

كل قيمة من حقل x كان مقابلها 0 في حقل $f'(x)$ أو التابع غير اشتقاقي عندها (شلمونة قصيرة) فهي قيمة حدية للتابع ونأخذ قيمتها من حقل $f(x)$ مثل:

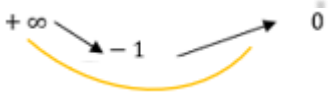
x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+++++$	$\|\|$	$----$	0	$+++++$		
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$ $\|\|$	$+\infty$ ↘	-1	↗	0	

نجد هنا أن $f(4) = -1$ قيمة حدية لأن مقابلها في حقل $f'(x)$ يوجد صفراً أي عُدِمَ المشتق عندها ومقابلها في حقل $f(x)$ يوجد -1.

ملاحظة: القيمة الحدية الكبرى يكون التابع قبلها متزايد وبعدها متناقص أو (شكلها تل)

القيمة الحدية الصغرى يكون التابع قبلها متناقص وبعدها متزايد أو (شكلها وادي)

في مثالنا السابق كانت قيمة حدية صغرى لأن التابع في حقل $f(x)$ نجد أنه كان متناقص قبلها وأصبح متزايد بعدها أو كانت على شكل "وادي" في حقل $f(x)$



ملاحظة هامة:

في بعض الأحيان تكون القيمة الحدية هي أحد أطراف المجال ولكن حصراً يجب أن يكون **مغلقاً**

مثل في الجدول المجاور:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$++++++++++$ $+++++$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

نجد أن التابع عند $a = 0$ معرف ولكن غير اشتقاقي و $f(0) = 0$ تكون قيمة حدية صغرى للتابع.

لتحديد فيم إذا كانت صغرى أم كبرى:

عندما يكون التابع بعدها متزايد تكون صغرى

عندما يكون التابع بعدها متناقص تكون كبرى

عن المتراجحات

هنا أولاً سننظر هل المتراجحة متعلقة بـ $f'(x)$ أو بـ $f(x)$؟؟

1- متعلقة بـ $f'(x)$:

عندما تتعلق المتراجحة بالمشتق فيكون سؤالنا عن اطراد التابع f ويكون جوابها مجال من حقل x مثل:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$++++$	0	$----$	‖	$---$	0	$+++$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	6	↘	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$ أي على أي مجال يكون التابع متزايد أي:

$$]-\infty,-3] \cup [1,+\infty[$$

نلاحظ أننا أغلقنا المجال عند الأعداد لأن المتراجحة أكبر أو تساوي.

حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$ أي على أي مجال يكون التابع متناقص أي:

$$[-3,-1[\cup]-1,1]$$

نلاحظ أننا أغلقنا المجال عند الأعداد لأن المتراجحة أصغر أو تساوي.

تمرين: بين حلول المتراجحتين $f'(x) \leq 0$ و $f'(x) > 0$ في الجدول المجاور:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+++++++$	0	$--------$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

شغف الرياضيات

2- المتعلقة بـ $f(x)$:

هنا ننظر لحقل $f(x)$ ونأخذ المجالات حسب المتراجحة المطلوبة مثل إذا كانت $f(x) \geq a$ فسنحدد المجالات التي يكون فيها التابع f أكبر أو يساوي a مثل:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$----$	-3	‖ 1	$++++$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

هنا حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$ هي $\mathbb{R}$ لأن في حقل $f(x)$ نجد أنه دائماً أكبر أو يساوي العدد 5 وهكذا.

تتمات في جداول التغيرات

1- حلول المعادلة $f(x)=\lambda$:

هنا ننظر إلى حقل $f(x)$ ونقوم بـ عدّ كم مرة مرق التابع بـ λ مثل:

حلول المعادلة $f(x)=0$ أي كم مرة عبر التابع من 0 في حقل $f(x)$:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$++++$	0	$----$	‖	$---$	0	$+++$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	6	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

$$-\infty \underset{\text{يوجد 0}}{\rightarrow} 6 \underset{\text{يوجد 0}}{\rightarrow} -\infty \,\|\, +\infty \underset{\text{يوجد 0}}{\rightarrow} -2 \underset{\text{يوجد 0}}{\rightarrow} +\infty$$

أي للمعادلة $f(x)=0$ أربعة حلول على المجال $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

مثال: ما عدد حلول المعادلة $f(x)=3$ على المجال $]-\infty,2]$؟

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	$++++++$				$------$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$		$+\infty$	↘	$-\infty$

حل وحيد.

تمرين: أوجد عدد حلول كل من المعادلات الآتية:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$----$	-3 ‖	1	$++++$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

$$f(x)=3$$

$$f(x)-5=0$$

$$f(x)-12=3$$

2- تصوير المجال:

عند تصوير مجال ما مثل $f([1,3])$ فنأخذ المجال $[1,3]$ من حقل x والصورة تكون مقابله من حقل $f(x)$ ولكن من أدنى قيمة إلى أعلى قيمة مثل:

هنا نجد أن:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$++++$	0	$----$	$\|\|$	$---$	0	$+++$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$ $+\infty$

$$f(]-\infty,-3]) =]-\infty,6]$$
$$f(]-3,-1[) =]-\infty,6[$$
$$f(]-1,1]) = [-2,+\infty[$$
$$f(]1,+\infty[) =]-2,+\infty[$$

ملاحظة: لمعرفة فيما إذا كان المجال مغلق أو مفتوح عند النقاط:

إذا كانت هذه الوايات تقابل نقطة تنتمي إلى المجال المعطى نغلق المجال.

إذا كانت هذه الوايات تقابل نقطة لا تنتمي إلى المجال المعطى نفتح المجال.

- **المستقر الفعلي:**

$$E_f = f(D_f)$$

هو عبارة عن تصوير كامل مجموعة التعريف وتكون الصورة من أصغر قيمة بحقل $f(x)$ إلى أكبر قيمة بحقل $f(x)$, في مثالنا السابق:

$$E_f =]-\infty,+\infty[$$

3- معادلة المماس ونصفي المماس:

نحن نعلم أن أي معادلة مماس لها ثلاث مقادير أساسية وهي:

الميل $f'(a)$, الترتيب $f(a)$, الفاصلة a

وفي الجداول سنميز نوع المماس من قيمة المشتق عند النقطة a ونميز الحالتين الآتيتين:

أ- المشتق معدوم عند a:

فيكون المماس أفقي ومعادلته $y = f(a)$ (تؤخذ من حقل $f(x)$) مثل:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$++++$	0	$----$	$\|\|$	$---$	0	$+++$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$ $+\infty$

إن معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها -3 هي $y = 6$ لأن المشتق معدوم عند

$a=-3$ فستكون معادلة المماس الافقي للتابع في النقطة التي فاصلتها $a=-3$ هي $y=f(-3)=6$, وعند $a=1$ أيضاً يوجد معادلة مماس افقي للتابع f ومعادلته $y=f(1)=-2$.

ب- المشتق له قيمة من اليمين وقيمة من اليسار:

فيكون يوجد نصفي مماس ميل المماس اليميني يمثل بقيمة $f'(a^+)$ أي من اليمين ونصف المماس اليساري يمثل بقيمة $f'(a^-)$ أي من اليسار مثل:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$----$	-2	$\|\|$	2	$++++$
$f(x)$	$+\infty$ ↘		2	↗	$+\infty$

هنا في النقطة التي فاصلتها 0 يوجد نصفي مماس لأن المشتق له قيمة من اليمين وقيمة من اليسار (شلمونة قصيرة) وتكون معادلة نصف المماس اليمين هي:

$$y=f'(0^+)(x-0)+f(0)$$

ومن الجدول نجد أن:

$$f(0)=2\,,f'(0^+)=2$$
$$\Rightarrow y=2(x-0)+2=2x+2$$

ومعادلة نصف المماس اليساري:

$$y=f'(0^-)(x-0)+f(0)$$

ومن الجدول نجد أن:

$$f'(0^-)=-2\,,f(0)=2$$
$$\Rightarrow y=-2(x-0)+2=-2x+2$$

أسئلة دورات ونماذج وزارية

السؤال الأول: نجد جانباً جدول تغيرات التابع f والمطلوب:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+++++++0$			$--------$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

١- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

٢- ما عدد القيم الحدية للتابع f؟

٣- اكتب معادلة المماس للتابع عند النقطة التي فاصلتها $a=1$.

السؤال الثاني: نجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$ 3

١- اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو افقي للخط C.

٢- هل يوجد مقاربات مائلة للخط C؟

٣- هل يوجد مماسات أفقية للخط C؟

٤- أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$		$\|\|$	$+\ +$	1	$-\ -\ -\ -\ -$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\searrow$	-3

السؤال الثالث: نجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب:

١- اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو افقي للخط C.

٢- هل يوجد مقاربات مائلة للخط C؟

٣- هل يوجد مماسات أفقية للخط C؟

٤- هل f اشتقاقي عند 3؟

٥- عين القيم الحدية للتابع f.

السؤال الرابع: ليكن f تابعاً مستمراً على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, خطه البياني C_f. جدول تغيراته الآتي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	3 $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1

١- جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه ثم استنتج معادلة كل مقارب افقي أو شاقولي لخطه البياني C_f.

٢- هل يوجد أي مقاربات مائلة للخط البياني C_f؟ علل إجابتك.

٣- أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

٤- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

٥- ما حلول كل من المتراجحتين الآتيتين: $f(x)>2$, $f'(x)\geq 0$

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ جدول تغيراته المجاور:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-2	↗	0

١- ما نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه؟

٢- ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) < 0$؟

٣- احسب $f(2)$ و $f'(2)$.

٤- عين $f(]-2,2])$.

السؤال السادس: نتأمل تابعاً f معرفاً على $\mathbb{R}$ وخطه البياني C. جدول تغيراته موضح جانباً:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$-$
$f(x)$	1	↗ 4 ↘	2

١- ما مجموعة تعريف f'؟

٢- أوجد معادلة كل مقارب افقي للتابع f. وهل يمكن أن يكون للخط البياني أي مقاربات مائلة؟ علل إجابتك.

٣- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$

٤- هل يقبل C أي مماسات افقية؟

٥- هل f تابع محدود؟

السؤال السابع: ليكن f تابعاً معرفاً واشتقاقياً على المجال $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ خطه البياني C_f. جدول تغيراته هو المجاور:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	e	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

١- جد نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه.

٢- اكتب معادلة كل مقارب افقي أو شاقولي للخط البياني C_f.

٣- هل يقبل الخط البياني أي مقاربات مائلة؟

٤- عين حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$.

٥- أوجد حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$.

٦- عين $\lim\limits_{x\to 0} f(f(x))$.

السؤال الثامن: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]-\infty, 3]$ والاشتقاقي على $I\backslash\{2\}$. جدول تغيراته الآتي:

x	$-\infty$		-1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$-3 \| \| 1$	$+$	
$f(x)$	3	↘	0	↘	-4	↗	0

1- هل $f(-1)$ قيمة حدية محلياً؟

2- دل على القيم الحدية محلياً مبيناً نوعها.

3- اكتب معادلة نصف المماس اليساري في النقطة التي فاصلتها -3.

4- ما حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$.

5- جد $f(]-\infty, 3])$.

شغف الرياضيات

المتتاليات ونهاية متتالية

أشكال التعبير عن المتتالية		
الحد العام	المتتالية التدريجية	المجاميع
u_n بدلالة n أو $u_n = f(n)$	u_{n+1} بدلالة u_n أو $u_{n+1} = f(u_n)$	$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أنواع المتتاليات		
حسابية	هندسية	unknown
كل حد ينتج عن سابقه بجمع بعدد r يسمى أساس المتتالية	كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد q يسمى أساس المتتالية	مافي شي ثابت

قوانين للمتتالية الحسابية والهندسية		
نوع المتتالية	الحسابية	الهندسية
معيار الكشف عنها	$u_{n+1} - u_n = r$	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$
قانون الحدين	$u_n = u_m + r(n-m)$	$u_n = u_m . q^{n-m}$
قانون المجموع	$S = \frac{a+\ell}{2}(n)$ n عدد الحدود. a الحد الأول. ℓ الحد الأخير.	$S = a\frac{1-q^n}{1-q}$ n عدد الحدود. a الحد الأول. q أساس المتتالية
المجموع مع القفزات	عدد الحدود الجديد $= \frac{\text{أول متغير} - \text{آخر متغير}}{\text{طول القفزة}} + 1$ $r' = \text{طول القفزة} \times r$	عدد الحدود الجديد $= \frac{\text{أول متغير} - \text{آخر متغير}}{\text{طول القفزة}} + 1$ $q' = q^{\text{طول القفزة}}$
ثلاث حدود متعاقبة a, b, c	القانون الأول: $a + c = 2b$ القانون الثاني: $b = a + r \quad , \quad c = a + 2r$	القانون الأول: $ac = b^2$ القانون الثاني: $b = aq \quad , \quad c = aq^2$

نهايات المتتالية الهندسية			
$q > 1$	$q = 1$	$q < 1$	$q \leq -1$
$\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$	$\lim_{n\to\infty} q^n = 1$	$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$	Error: not found

اطراد متتالية			
الفرق	النسبة	الاثبات بالتدريج	المشتق
$u_{n+1}-u_n$ ونقارن مع الصفر	$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ونقارن مع الواحد	نعرف قضية حسب الطلب	نوجد المشتق ونقارن مع الصفر
يستخدم في المجاميع	يستخدم عند وجود a^n أو $n!$	يستخدم عند وجود متتالية تدريجية	في باقي الحالات

الإثبات بالتدريج

1- نرمز للقضية $E(n)$

2- نثبت صحة القضية من أجل أول قيمة لـ n ولتكن n_0

3- نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة ... (الفرض)

4- نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ ... (الطلب) مستفيدين من (الفرض)

التمرين الأول: بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة بالشكل

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-3 \quad \text{و} \quad u_0=2$$

و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $v_n=u_n+6$

1- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية و عين أساسها و حدها العام ثم احسب نهايتها

2- استنتج u_n بدلالة n ثم عين نهايتها

3- بفرض $w_n=\ln(v_n)$ أثبت أن (w_n) حسابية ثم احسب المجموع

$$w_0+w_1+\cdots+w_5$$

التمرين الثاني: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بالعلاقة التدريجية وفق:

$$u_{n+1}=u_n+\frac{3^{n-1}}{2^n}$$
$$u_0=2$$

ولدينا المتتالية (v_n) المعرفة وفق: $v_n=u_{n+1}-u_n$

والمطلوب:

1- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية وعين أساسها وحدها الأول ثم احسب نهايتها

2- أحسب المجموع

$$S_n=v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n$$

التمرين الثالث: ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالتدريج وفق:

$$u_{n+1} = 2u_n + 4$$
$$u_0 = 0$$

ونتأمل المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$x_n = u_n + 4$$

1- أثبت أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ هندسية وعين أساسها ونهايتها

2- أكتب x_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3- أحسب المجموع

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

4- استنتج المجموع

$$S'_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

التمرين الرابع: ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالتدريج وفق:

$$u_{n+1} = 5u_n + 4$$
$$u_0 = 0$$

ونتأمل المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$x_n = u_n + 1$$

١- أثبت أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ هندسية وعين أساسها ونهايتها

٢- أكتب x_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

٣- أحسب المجموع

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

٤- استنتج المجموع

$$S'_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

التمرين الخامس: ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = 2 \times 3^n$$

١- أثبت أن المتتالية هندسية وعين أساسها وحدها الأول.

٢- احسب المجموع:

$$S = u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{22}$$

التمرين السادس: احسب المجموع:

$$S_n = 1 + \frac{5}{4} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \cdots + 3$$

التمرين السابع: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ و $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ و $u_0 = e^3$ و v_n متتالية معرفة وفق

$v_n = \ln(u_n) - 2$ والمطلوب:

١- أثبت أن v_n هندسية وعين أساسها وحدها الأول

٢- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

٣- احسب نهاية u_n

التمرين الثامن: لتكن الحدود a,b,c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية متزايدة تحقق: $a+b+c=39$ $a.b.c=729$ احسب a و b و c.	**التمرين التاسع:** لتكن الحدود a,b,c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية متزايدة تحقق: $a+b+c=15$ $a^2+b^2+c^2=107$ احسب a و b و c ثم استنتج u_n بدلالة n إذا علمت أن $u_0=a$.
التمرين العاشر: بفرض $u_n=2\times 3^n$: 1- أثبت أنها هندسية. 2- احسب المجموع: $u_0+u_1+u_2-u_5-u_6-u_7$	**التمرين الحادي عشر:** لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها: $u_2=3+\lambda$, $u_1=1+\lambda$, $u_0=\lambda$ 1- عين قيمة λ. 2- من أجل $\lambda=1$ عين u_n بدلالة n.

حالات أسئلة الإثبات بالتدريج

المضاعفات	المجاميع	المتراجحات	المتتاليات التدريجية
			الحالة الأولى: u_n ذكرت مرة واحدة فقط عندها ننطلق من (الفرض) ونطبق عمليات جبرية (ضرب، جمع , طرح) للوصول لشكل f **الحالة الثانية:** u_n ذكرت أكثر من مرة عندها: 1- نعرف التابع $f(x)$ على المجال 😉 2- نحسب $f'(x)$ 3- نثبت أن f متزايد أي $f'(x)\geq 0$ 4- نصور به أطراف المتراجحة

التمرين الأول: أثبت أن $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7

التمرين الثاني: أثبت أن $3^{2n}-4^n$ مضاعف للعدد 5

التمرين الثالث: أثبت أن n^3+2n مضاعف للعدد 3

التمرين الرابع: أثبت أن:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

التمرين الخامس: أثبت أن:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

التمرين السادس: أثبت أن:

$$(1+x)^n\geq 1+nx$$

التمرين السابع: أثبت أن:

$$n!\geq 2^{n-1}$$

التمرين الثامن: لتكن $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ و $u_0=1$

١- أثبت أن $0\leq u_n\leq 2$ أياً كان $n\geq 0$

٢- أثبت أن المتتالية السابقة $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

التمرين التاسع: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ عند كل $n\geq 0$

1- أثبت أن التابع $f(x)=\frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2}<u_n\leq 1$ أياً كان العدد n .

2- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً .

مصطلحات هامة		
$u_n\leq M$ متتالية محدودة من الأعلى ويسمى M عنصر راجح	$m\leq u_n$ متتالية محدودة من الأدنى ويسمى m عنصر قاصر	$m\leq u_n\leq M$ متتالية محدودة.

مبرهنات هامة:

١- المتتالية التي نهايتها عدد تكون متقاربة من هذا العدد

٢- المتتالية التي نهايتها ∞ تكون متباعدة

٣- كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة

٤- كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى متقاربة

متتالية الحد العام $u_n = f(n)$		
نهايتها	محدوديتها	اطرادها
نحسب النهاية بشكل مباشر بالاستفادة من حالات عدم التعيين	ندرس تغيرات التابع $f(x)$ ونستنتج من حقل $f(x)$ المطلوب.	المشتق أو النسبة في حال وجود a^n أو $n!$

تقارب متتالية المجاميع		
مجموع مباشر	مقارنة مع الهندسية	التشطيب
$na \leq a + b + \cdots + c \leq nc$ a أصغر حد في المجموع c أكبر حد في المجموع n عدد الحدود	بالاستفادة من متراجحة سابقة تكون مثبتة في السؤال: ١- نعوض الحدود من n_0 إلى n. ٢- نجمع المتراجحات. ٣- نستنتج مجموع المتتالية الهندسية. ٤- نهمل q^n ومبروووك عليك!	١- غالباً يشتمل التمرين على صيغتين متكافئتين احداهما تحوي طرح ٢- نكتب حدود المجموع بدلالة صيغة الطرح ٣- منفرد المجموع بشكل عمودي ومنشطب الحدود

المتتالية التدريجية			
اطرادها	محدوديتها	تقاربها	نهايتها
إما الإثبات بالتدريج أو بالفرق (استنتاج إشارة الفرق)	تعطى في السؤال قضية نثبتها بالتدريج	مبرهنات التقارب	حل المعادلة $f(x) = x$

التمرين الأول: نتأمل المتتالية المعرفة وفق $u_0 = \frac{5}{2}$ و

$$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$$

١- أثبت أن $2 \le u_n \le 3$

٢- أثبت أن $(u_n)_{n\ge 0}$ متناقصة

٣- استنتج أنها متقاربة وعين نهايتها

التمرين الثاني: نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرفة وفق :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \quad , \quad u_0 = 3$$

١- أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على المجال $[2, +\infty[$ ثم نظم جدولاً بها

٢- أثبت أن $d: y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل وادرس الوضع النسبي

٣- أثبت بالتدريج أن $2 \le u_{n+1} \le u_n$

٤- استنتج أنها متقاربة وعين نهايتها

٥- ارسم المستقيم $\Delta: y = x$ ثم ارسم d و c_f ومثل الحدود u_0, u_1 على محور الفواصل

التمرين الثالث: لتكن المتتالية $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$:

١- ادرس اطراد u_n

٢- أثبت أن العدد 2 عنصر راجح على u_n

٣- استنتج أنها متقاربة ثم احسب نهايتها

التمرين الرابع: لتكن $(u_n)_{n\ge 1}$ المتتالية المعرفة وفق :

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

١- برهن أن $\frac{1}{(n)!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ مهما يكن $n \ge 1$

٢- استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و عين عنصراً راجحاً

٣- أثبت أن (u_n) متزايدة واستنتج أنها متقاربة

التمرين الخامس: أولاً: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$$

أثبت أن $f(x) = \frac{x}{2}(1+x^4)f'(x)$ ثم استنتج $g'(x)$ حيث $g: x \mapsto f(\sin x)$.

ثانياً: متتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ معرفة وفق:

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

(a) أثبت أن $\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \le u_n \le \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$ أياً كان $n \ge 1$.

(b) استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\ge 1}$ واحسب نهايتها.

التمرين السادس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = xe^{-x}$:

1- احسب نهاية التابع f عند $+\infty, -\infty$ ثم احسب $f'(x)$ وادرس اطراد f و نظم جدولاً بتغيراته و عين ما له من قيم حدية ثم ارسم C

2- احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0\,, x = 1$

3- عين كثير حدود $P(x)$ من الدرجة الأولى يجعل التابع $G(x) = P(x)e^{-x}$ تابعاً اصلياً للتابع $f^2(x)$ ثم احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق حول ox.

4- أثبت وجود عددين حقيقيين a و b المحققان للعلاقة $\frac{a}{b} = e^{a-b}$.

5- لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً كما يأتي : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

a) أثبت أن $0 < u_n \leq 1$ و ذلك مهما كان الدليل n

b) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ثم بين أنها متقاربة و احسب نهايتها .

المتتاليات المتجاورة

1- نثبت أن احداهما متناقصة واحداهما متزايدة.

2- نشكل الفرق: $v_n - u_n$

3- نثبت أن $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$.

ملاحظة: عندما تكون المتتاليتان متجاورتان تكونا متقاربتان معاً ولهما نفس النهاية.

التمرين الأول: لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفتان وفق:

$$v_n = u_n + \frac{1}{2^n} \qquad u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$$

1- ادرس اطراد كلٍ من u_n و v_n

2- بسط عبارة u_n

3- استنتج أن u_n و v_n متجاورتين

التمرين الثاني: نتأمل المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$, المعرفتين تدريجياً بالشكل:

$$s_{n+1} = \frac{t_n + 3s_n}{4}\,, s_0 = 12$$
$$t_{n+1} = \frac{t_n + 2s_n}{3}\,, t_0 = 1$$

1- أثبت أن المتتالية $v_n = s_n - t_n$ هندسية، واحسب نهايتها.

2- أثبت ان المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان.

3- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = 3t_n + 8s_n$ ثابتة.

4- ماذا تستنتج بما يتعلق في المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$؟

اختبار

التمرين (1)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق ما يأتي:

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

1- اثبت أن المتتالية u_n متناقصة.

2- أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ واستنتج أنها متقاربة وعين نهايتها.

التمرين (2)

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتان وفق:

$$u_n = 5 - \frac{1}{n} \quad , \quad v_n = 5 + \frac{1}{n^2}$$

1- أثبت أن u_n متزايدة.

2- أثبت أن v_n متناقصة.

3- هل المتتاليتان v_n و u_n متجاورتان؟ علل إجابتك.

التمرين (3)

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

1- أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

2- أثبت أن S_n تكتب بالشكل:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$

ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ وبين أنها متقاربة.

التمرين (4)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

١- ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

٢- اثبت أن العدد 2 راجح على $(u_n)_{n\geq 0}$.

٣- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ثم جد عدداً حقيقياً n_0 يحقق أياً كان $n > n_0$ كان u_n في المجال $]1.9,2.1[$.

التمرين (5)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots + \frac{n}{e^n}$$

١- أثبت أن $n \leq 2^n$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$.

٢- استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

٣- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

التمرين (6)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2 \; ; u_0 = \frac{5}{2}$$

١- أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n.

٢- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

٣- استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وجد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين (٦)

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$$u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6$$

١- أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $2 \leq u_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n.

٢- أثبت أن $u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2)$.

٣- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

٤- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

التمرين (8)

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$:

$$v_n = u_n + \frac{1}{2^n}\ ,u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$$

1- أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة.

2- استنتج أن المتتاليتين $(v_n)_{n\geq 1}$ و $(u_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.

3- أثبت أن $u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$, ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

التمرين (9)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 1}\ ; u_0 = 2$$

1- اثبت أن $2 \leq u_n \leq 5$ أياً كان $n \geq 0$.

2- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً, واستنتج تقاربها, ثم احسب نهايتها.

التمرين (10)

لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $v_{n+1} = \frac{5v_n+4}{v_n+2}$ وبفرض المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{v_n - 4}{v_n + 1}$$

1- أثبت أن u_n هندسية وعين أساسها.

2- عين u_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n (استعمل جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين في العزل)

3- احسب قيمة المجموع:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

التكامل والتوابع الأصلية

إثبات أن F تابع أصلي	إثبات أن F و G تابعان أصليان
1- F اشتقاقي على I. 2- $F'(x) = f(x)$	نثبت أن: $F(x) - G(x) = \underbrace{k}_{\text{ثابت}}$

إيجاد التوابع الأصلية لتوابع بسيطة

$f(x)$		$f(ax+b)$	
$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$
$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x^n\ ; n \neq -1$	$\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$	$(ax+b)^n\ ; n \neq -1$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\pm e^{\pm x}$	$e^{\pm x}$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	e^{ax+b}
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$	$\frac{1}{ax+b}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$	$1+\tan^2 ax+b$
$-\cot(x)$	$1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{a}\cot(ax+b)$	$1+\cot^2 ax+b$

إيجاد تابع أصلي لتابع جداء

مركب x بسيط	بسيط x بسيط (اختلاف بالنوع)
1- نفرض مضمون المركب H. 2- نوجد H'. 3- نظهر H' في عبارة $f(x)$. 4- نحذف المشتق ونكامل. 5- نعوض قيمة H.	1- أسي x صحيح 2- مثلثي x صحيح 3- لوغارتمي x صحيح 4- لوغارتمي x $\frac{1}{x^n}$ و $n \neq 1$. 5- اسي x مثلثي التكامل بالتجزئة: $\int_a^t u.v'dx = [u.v]_a^t - \int_a^t u'.v\,dx$

ملاحظات هامة:

1- التكامل يحترم الجمع والطرح والأمثال لا تكامل.

2- بعد كل تكامل نضع $+k$.

3- تذكر أن: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ وأن $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$.

4- أي قوة أو جذر في المقام يرفع إلى البسط مع تغيير إشارة الأس.

تمارين

1- أثبت أن F تابع أصلي للتابع f على I في الحالات الآتية:

1	$F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \; ; f(x) = \frac{2(x^4-1)}{x^3}$ $I = \mathbb{R}^*$	2	$F(x) = \tan(x) - x \; ; f(x) = \tan^2 x$ $I =]0, \frac{\pi}{2}[$
3	$F(x) = \ln(ln(x)) \; ; f(x) = \frac{1}{xln(x)}$ $I =]1, +\infty[$	4	$F(x) = \sqrt{e^x} \; ; f(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{2}$ $I = \mathbb{R}$

2- أثبت أن F و G تابعان أصليان للتابع ذاته:

1	$F(x) = 601 - \cos^2(x) \; ; G(x) = \sin^2 x$	2	$F(x) = \tan^2(x) \; ; G(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

3- عين تابعاً اصلياً لكل من التوابع الآتية أو احسب التكامل:

1	$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x}$	2	$\int_1^4 \frac{1}{(2x-1)^2}\, dx$
3	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$	4	$f(x) = \sqrt{x} - \cos(x)$
5	$f(x) = \tan^2 x$	6	$\int_0^e e^{\frac{x}{2}}\, dx$
7	$f(x) = x\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$	8	$f(x) = \frac{4x+2}{(x^2+x)^2}$
9	$\int_0^{\pi} e^x \cos(e^x)\, dx$	10	$f(x) = (x+1)\sin(x^2+2x+3)$
11	$f(x) = \frac{3}{x}(\cos(ln(x))$	12	$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)+1}}\, dx$
13	$f(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$	14	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos(x) - \sin(3x)\, dx$
15	$f(x) = \frac{1}{2x+1}$	16	$\int_{-\frac{4}{5}}^{-\frac{3}{5}} \frac{3}{5x+2}\, dx$
17	$f(x) = (2x+1)e^x$	18	$f(x) = \ln(x)$

19	$f(x) = x\cos(x)$	20	$f(x) = e^{2x}\cos(x)$
21	$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$	22	$\int_1^e \frac{\ln(x)-1}{x}\,dx$

التكاملات الكسرية

البسط مشتق المقام	درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام	درجة البسط أصغر تماماً من درجة المقام (تحليل المقام)	
$\ln\lvert$المقام$\rvert + k$ **ملاحظة:** للتخلص من القيمة المطلقة: 1- المضمون مثلثي (دائرة) 2- المضمون ليس مثلثي (قيمة تجريبية)	1- قسمة البسط على المقام قسمة إقليدية 2- نكتب التابع بالشكل: $f(x) =$ الناتج $+ \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$	**المقام مطابقة:** نرفع المقام للبسط ونغير إشارة الأس	**المقام قوسين مختلفين:** تفريق كسور

تمارين

عين تابعاً اصلياً للتابع f في كل من الحالات الآتية أو احسب التكامل:

1	$f(x) = \tan(x)\ ; I =]0, \frac{\pi}{2}[$	2	$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ ; I = \mathbb{R}$
3	$f(x) = \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\ ; I =]0, \frac{\pi}{2}[$	4	$\int_{2-}^{e} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$
5	$\int_2^4 \frac{3}{1-2x+x^2}\,dx$	6	$f(x) = \frac{1}{x^2-6x+9}$
7	$\int_3^6 \frac{2x-1}{x-1}\,dx$	8	$\int_4^7 \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$
9	$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-x-2}\ ; I =]-1,2[$	10	$f(x) = \frac{x}{x^2+3}$
11	$f(x) = \frac{x+1}{(x+2)^4}$	12	$f(x) = (x+5)\sqrt{x+6}$

التكاملات المثلثية		
جميع الأسس زوجية	يوجد أس فردي	جداء تابعين مثلثيين
$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$ $\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$	$\cos^{2k+1} x = \cos^{2k}(x).\cos(x) = (\cos^2 x)^k.\cos(x) = (1-\sin^2 x)^k \cos(x)$ ثم ننشر المطابقة ونفرض $\sin(x) = H$ فيكون $H' = \cos(x)$ انتبه!! تكامل H' لحالو هو H	$\cos(a).\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$ $\sin(a).\sin(b) = -\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$ $\sin(a).\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$

تمارين

عين تابعاً اصلياً للتابع f في كل من الحالات الآتية أو احسب التكامل:

١	$f(x) = \cos^4 x$	٢	$f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$
٣	$f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$	٤	$f(x) = \cos^3 x \sin^5 x$
٥	$f(x) = \sin(x)\cos(2x)$	٦	$f(x) = \tan^3 x$
٧	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2-2\cos(2x)}\ dx$	٨	$f(x) = \frac{1}{\sin(2x)}$

كيف نكامل القيمة المطلقة؟!

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

1- نعدم $f(x)$ أي نضع $f(x) = 0$

2- نحل المعادلة فنجد أن $x = c$

3- نجزء التكامل:

$$\int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|\,dx$$

4- على المجال الذي يكون عليه $f(x)$ سالباً نضع $|f(x)| = -f(x)$

وعلى المجال الذي يكون عليه $f(x)$ موجباً نضع $|f(x)| = f(x)$

ثم نكامل.

مثال:

$$I = \int_1^5 |2x-4|\,dx$$

$$2x-4=0 \Rightarrow x=2$$

$$I = \int_1^2 |2x-4|\,dx + \int_2^5 |2x-4|\,dx$$

$$= \int_1^2 (-2x+4)\,dx + \int_2^5 (2x-4)\,dx$$

$$= [-x^2+4x]_1^2 + [x^2-4x]_2^5$$

$$= [(-4+8)-(-1+4)] + [(25-20)-(4-8)]$$

$$= [1]+[9] = \boxed{10}$$

$\int_0^{600}$ (االنجاح) $dx =$ أنت 😊

كيف نكامل $min-max$؟!

لإيجاد $\min(f(x),g(x))$:

1- نضع $f(x)=g(x)$.

2- نحل المعادلة.

3- ننظم الجدول:

x	a	x_0	b
$\min(f(x),g(x))$	نجرب قيمة في التابع الذي يعطي القيمة الأصغر	نجرب قيمة في التابعين ونختار التابع الذي يعطي القيمة الأصغر	

4- قاعدة شال.

تمارين			
احسب التكامل في كل من الحالات الآتية:			
١	$I = \int_0^2 \min(x,x^2)\,dx$	٢	$J = \int_{\frac{1}{2}}^{e} \ln\left(e^{max\left(x,\frac{1}{x}\right)}\right)dx$

تمارين عامة في التكامل

السؤال الأول: نريد حساب $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} dx$

١- احسب $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$ **ثم** $I + J$

٢- استنتج قيمة I

الحل:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{2\cos x}^{H'}}{\underbrace{1+2\sin x}_{H}} dx$$

$$= \frac{1}{2}[\ln|1+2sinx|]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{2}\ln(3)}$$

$$I + J$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)+\cos x}{1+2\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x+\cos x}{1+2\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,(2\sin x+1)}{1+2\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$$

$$= [\sin x\,]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow I + J = 1$$

$$I + \frac{1}{2}\ln 3 = 1 \Rightarrow \boxed{I = 1 - \frac{1}{2}\ln 3}$$

السؤال الثاني: نريد حساب $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$

١- احسب $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ **ثم** $I + J$

٢- استنتج I

الحل:

$$J=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}[\ln|1+x^2|]_0^1=\frac{1}{2}\ln(2)$$
$$I+J=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{x^3+x}{1+x^2}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2}dx$$
$$=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

إذن:

$$I+J=\frac{1}{2}$$
$$I+\frac{1}{2}\ln(2)=\frac{1}{2}$$
$$\boxed{I=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln(2)}$$

السؤال الثالث: ليكن:

$$f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}$$

1- **جد الأعداد** c,b,a **التي تحقق أن** $f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$

2- **احسب** $J=\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$

الحل:

$$f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}=\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$$
$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^2=1+2(1)\left(\frac{1}{x-1}\right)+\left(\frac{1}{x-1}\right)^2=1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$
$$a=1 \quad b=2 \quad c=1$$
$$J=\int_{-3}^{0}\left(1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=\int_{-3}^{0}\left(1+2\frac{1}{x-1}+(x-1)^{-2}\right)dx$$
$$=\left[x+2\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{-3}^{0}$$

$$= \left[\left(0+0+\frac{(-1)^{-1}}{-1}\right)-\left(-3+2\ln(2)+\frac{(-4)^{-1}}{-1}\right)\right]$$

$$= -1+3-2\ln(2)+\frac{1}{-4}$$

$$= 2-\frac{1}{4}-2\ln(2) = \boxed{\frac{7}{4}-2\ln(2)}$$

السؤال الرابع: أثبت أن $\frac{1}{1+e^x} = 1-\frac{e^x}{1+e^x}$ **ثم احسب** $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$

$$l_2 = 1-\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} = l_1$$

$$I = \int_0^1 1-\frac{\overbrace{e^x}^{H'}}{\underbrace{1+e^x}_{H}}dx = [x-\ln|1+e^x|]_0^1$$

$$= (1-\ln(1+e))-(0-\ln(2))$$

$$= \boxed{1-\ln(1+e)+\ln(2)}$$

مساحة لخط بياني وحيد		مساحة بين خطين
التابع فوق الأرض	التابع تحت الأرض	دائماً سيكون الشرط:
المساحة المحصورة بين الخط البياني ومحور الفواصل والمستقيمين $x = a_1 , x = a_2$: $\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx$	المساحة المحصورة بين الخط البياني ومحور الفواصل والمستقيمين $x = a_1 , x = a_2$: $-\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx = \int_{a_2}^{a_1} f(x)\,dx$	$\int_{a_1}^{a_2}$ الأدنى – الأعلى dx **ملاحظة:** من الممكن أن يكون المساحة المطلوبة بين خطين بيانيين **أو** خط بياني ومستقيم مائل.

الحجوم	
حجم كرة انطلاقاً من مساحة مقطع	حجم مسجم ناتج عن دوران منحني لتابع
1- نحسب مساحة مقطع من هذا المجسم بدلالة متحول واحد ونرمز لها $A\left(\text{متحول}\right)$. 2- نكامل تابع المساحة A على الحدود المناسبة.	نستعمل القانون: $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

اختبار

السؤال الأول: احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

$I_1 = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2-4}\,dx$	$I_2 = \int_1^2 \frac{3}{t^2} e^{-\frac{1}{t}-1}\,dt$	$I_3 = \int_0^{\pi} \sqrt{4-4\sin^2 x}\,dx$
$I_4 = \int_0^1 \frac{(1-x)}{e^x}\,dx$	$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x\,dx$	$I_6 = \int_1^e \frac{2+\ln(x)}{x}\,dx$

السؤال الثاني: ليكن لدينا:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,dx \quad , \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,dx$$

1- احسب $I+J$.

2- احسب $I-J$.

3- استنتج كلاً من I و J.

السؤال الثالث: احسب التكامل الآتي:

$$\int_1^3 \min(ln(x)\ , ln(4-x))\ dx$$

السؤال الرابع: اثبت أن التابع $F(x)=x^x$ تابع أصلي للتابع $f(x)=(\ln(x)+1)x^x$ ثم احسب التكامل الآتي:

$$\int_1^4 f(x)\ dx$$