إليكم حل المسائل الشاملة

في الأشعة

والثامنة لك

للمرور على جميع الأفكار

بالإضافة إلى ما تم

حله على اللوح

SUBJECT:

المسألة الأولى :

في معلم متجانس نتأمل النقاط :

$A(2,-2,2)$, $B(1,1,0)$

$C(1,0,1)$, $D(0,0,1)$

1. تحقق أن النقاط (BCD) لا تقع على استقامة واحدة.

لإثبات أن النقاط ليست على استقامة واحدة نثبت أن الأشعة $\vec{BD}$, $\vec{BC}$ غير مرتبطة خطياً.

$\vec{BC}(0,-1,1)$ / $\vec{BD}(-1,-1,1)$

المركبات غير متناسبة فالأشعة غير مرتبطة خطياً.

إذن النقاط B ، C ، D لا تقع على استقامة واحدة وتحدد مستوياً.

2. أثبت أن $y+z-1=0$ هي معادلة المستوي (BCD).

لإثبات أن هذه معادلة مستوي يجب أن تحقق إحداثيات النقاط الثلاث المعادلة:

• النقطة $B(1,1,0)$:

تحقق $y+z-1=0 \Rightarrow 1+0-1=0$

• النقطة $C(1,0,1)$:

تحقق $y+z-1=0 \Rightarrow 0+1-1=0$

• النقطة $D(0,0,1)$:

تحقق $y+z-1=0 \Rightarrow 0+1-1=0$

إذن المعادلة $y+z-1=0$ تمثل المستوي (BCD).

3. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من A ويعامد المستوي (BCD)

المستقيم Δ يمر من $A(2,-2,2)$ وعمودي على المستوي P $(y+z-1=0)$

$\Leftarrow$ شعاع التوجيه هو نفسه الناظم على المستوي $\vec{n}(0,1,1)$

التمثيل الوسيطي :

$$\Delta: \begin{cases} x=2 \\ y=-2+t \\ z=2+t \end{cases} \quad ; t\in\mathbb{R}$$

4. عيّن إحداثيات K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD)

نعوض معادلات المستقيم Δ في معادلة المستوي :

$-2+t+2+t-1=0$

$2t-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$

نعوض قيمة t في معادلات Δ لإيجاد إحداثيات K :

$K\left(2,-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$

5. اكتب معادلة الكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً لها

مركز الكرة I منتصف القطعة $[AD]$

$x_I=\frac{x_A+x_D}{2}=\frac{2+0}{2}=1$

$y_I=\frac{y_A+y_D}{2}=\frac{-2+0}{2}=-1$

$z_I=\frac{z_A+z_D}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$

إذن المركز هو :

$I\left(1,-1,\frac{3}{2}\right)$

/ /

المسألة [2] ①

$\vec{AB}(-1,-1,-4)$

② $\vec{CE}(-3,-1,1)$

$\vec{CD}(-4,4,0)$ $\Big]$ $\frac{-3}{-4} \neq \frac{-1}{4}$

D,E,C لا تقع على استقامة واحدة ....

③ لنثبت $\vec{AB}(-1,-1,-4)$

تعامد $\vec{CE}$, $\vec{CD}$

$\vec{AB} \cdot \vec{CE} = 3+1-4=0$

$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 4-4-0=0$

$\vec{AB}$ ناظم على المستوي (CED)

④ $C(4,0,0)$

$\vec{n} = \vec{AB}(-1,-1,-4)$

$-1(x-4)-1(y-0)-4(z-0)=0$

$\boxed{-x-y-4z+4=0}$

⑤ $dis(B,(CDE)) = \frac{|-1-0+4+4|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{18}}$

$(x-1)^2+(y-0)^2+(z+1)^2 = \frac{49}{18}$

/ /

المسألة ③ تم حله في الدرس

المسألة ④ تم حله في الدرس

المسألة ⑤ $\boxed{1}$ $A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$ $D(0,2,0)$ $C(2,2,0)$
$E(0,0,2)$ $F(2,0,2)$ $G(0,2,2)$ $G(2,2,2)$
$O(1,1,1)$

$\boxed{2}$ نفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$\overrightarrow{OG}(1,1,1)$
$\overrightarrow{OB}(1,-1,-1)$

$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{OG}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b-c=0 \end{cases}$

بالجمع $\boxed{a=0}$

نفرض $b=+1 \Rightarrow c=-1$

إذاً $\vec{n}(0,1,-1)$

نختار النقطة $O(1,1,1)$

$(GOB): 0(x-1)+1(y-1)-1(z-1)=0$

$$\boxed{y-z=0}$$

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OG}=1-1-1=-1$

$$\cos(G\hat{O}B)=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OG}}{\|\overrightarrow{OB}\|\cdot\|\overrightarrow{OG}\|}=\frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{-1}{3}$$

/ /

$\boxed{4}$

$\vec{u} = \overrightarrow{DC}(2, 0, 0)$
$D(0, 2, 0)$

$\Big\} (DC) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

$\boxed{5}$ نعوض معادلات المستقيم في المستوي

$y - z = 0$

$2 - 0 = 0$

$2 = 0$ مستحيلة

$\Leftarrow (DC)$ يوازي المستوي (GOB)

$\boxed{6}$ من الشكل نلاحظ:

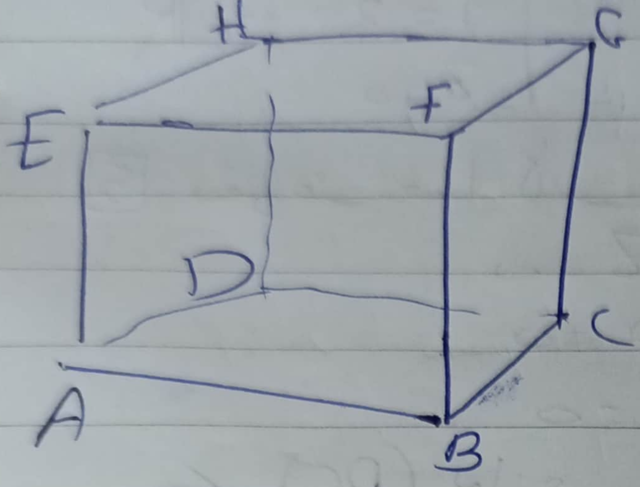
$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = 1$

/ /

المسألة 6 $\vec{i} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{AD}$ $\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{AE}$



$A(0,0,0)$ $E(0,0,2)$
$B(2,0,0)$ $F(2,0,2)$
$D(0,2,0)$ $G(2,2,2)$
$C(2,2,0)$ $H(0,2,2)$

1

$\vec{GB}(0,-2,-2)$
$\vec{GD}(-2,0,-2)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\left.\begin{array}{l}\vec{n}\cdot\vec{GB}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{GD}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}-2b-2c=0\\ -2a-2c=0\end{array}$

من 1 $b=-c$

نفرض $c=1$ $b=-1$ $\Leftarrow$ $a=-1$

$\vec{n}(-1,-1,1)$ $B(2,0,0)$

$-(x-2)-1(y-0)+1(z-0)=0$

$\boxed{-x-y+z+2=0}$

2

$\vec{u}=\vec{EC}(2,2,-2)$ $E(0,0,2)$

$\begin{cases} x=2t \\ y=2t \\ z=-2t+2 \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$

/ /

③ نعوض معادلات المستقيم $(GBD)\cap(EC)$

$$-2t-2t-2t+2=0$$

$$t=\frac{1}{3}\Longrightarrow I\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

④ نعرض $M(x,y,z)$ $\quad \overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\Rightarrow x=\frac{2}{3}\quad y=\frac{2}{3}\quad z=\frac{4}{3}$$

$$M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

⑤ $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{HM}=$

$$(2,2,-2)\left(\frac{2}{3},\frac{-4}{3},\frac{-2}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=0$$

/ /

المسألة 7:

① $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (3,-1,-2)\cdot(-2,2,-4)$
$= -6 - 2 + 8 = 0$
متعامدين .....
$(AC) \perp (AB)$
[المثلث ABC قائم في A]

② $\vec{n}\cdot\vec{AB} = 6 - 4 - 2 = 0$
$\vec{n}\cdot\vec{AC} = -4 + 8 - 4 = 0$
إذن $\vec{n}$ ناظم —

~~2(x+1)+4(y+1)+z+2~~
$2(x+1) + 4(y-2) + z - 3 = 0$
$2x + 4y + z - 9 = 0$

③ $\vec{u} = \vec{n}(2,4,1)$
$D(3,1,1)$

$$\begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 4t+1 \\ z = t+1 \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

④ $dis(D,(ABC)) = \dfrac{|6+4+1-9|}{\sqrt{4+16+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{21}}$

/ /

[illegible] ABC قائم في A

$$S = \frac{AB\,AC}{2} = \frac{\sqrt{14}\,\sqrt{24}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{7}\,2\sqrt{6}}{2}$$

$$= \cancel{\sqrt{2}}\,\sqrt{7}\,\cancel{\sqrt{2}}\,\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{21}$$

$$V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3}\, 2\sqrt{21}\, \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{4}{3}$$

$$1\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$ (5)

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{GC}$$

ارتباط خطي $\Longrightarrow$ توازي

/ /

المسألة 8 ، $A(1,1,2)$; $P: x-y+2z-1=0$

$Q: 2x+y+z+1=0$

① ندرس ارتباط النواظم: $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1}$

متقاطعان

② باكل المشترك: $3x+3z=0$

$x=-z$

نفرض $\boxed{z=t} \Leftarrow \boxed{x=-t}$

نعوض في الأولى ، $-t-y+2t-1=0$

$\boxed{y=t-1}$

$$\begin{cases} x=-t \\ y=t-1 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

③

$$R \begin{cases} \to A(1,1,2) \\ \to \vec{n}(a,b,c) \end{cases}$$

$\vec{n}\cdot\vec{n_P}=0 \Rightarrow a-b+2c=0$

$\vec{n}\cdot\vec{n_Q}=0 \Rightarrow 2a+b+c=0$

$+$

باكل المشترك

$\vec{n}(-1,1,1)$

/ /

$-1(x-1)+1(y-1)+1(z-2)=0$

$-x+y+z-2=0$

④ نعوض معادلات d في R :

$t+t-1+t-2=0 \Rightarrow t=1$

$B(-1,0,1)$

⑤ لعد A عن المستقيم نوجد A' مسقط A على المستقيم.

وهو حسوما سبق في B

$\Rightarrow AB=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

المسألة ⑨

[1]

$P: \vec{n}_P(2,-1,2)$
$\vec{n}_Q(1,1,1)$ $\Big\}$ $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{1}$

بجمع معادلتي P, Q : $3x+3z-3=0$

$x=-z+1$

نفرض $\boxed{z=t} \Rightarrow x=-t+1$

نعوض في P : $-2t+2-y+2t-2=0$

$y=0$

$$\begin{cases} x=-t+1 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$$

(2) $\vec{n}_R(1,0,-1)$

$\vec{u}_\Delta(-1,0,1)$

مرتبطان خطيا

$R \perp \Delta$

لإثبات أن $A(1,2,0)$ ينتمي R نعوض

$1-0-1=0$

(3) نعوض معادلات Δ في R:

$-t+1-t-1=0$

$t=0 \Rightarrow I(1,0,0)$

(4) حسب ما سبق I مسقط A
القائم Δ
وبالتالي البعد المطلوب

$AI=\sqrt{0+4+0}=2$

الساعة 15- تم ملاحق الدروس

المسألة 11

في معلم متجانس نتأمل النقاط :

$A(1,3,0)$ $B(0,6,0)$

$N(0,0,3)$ $M(0,6,2)$

1. اكتب معادلة المستوي (AMN)

نوجد مركبات الشعاعين $\vec{AM}, \vec{AN}$ ونثبت أنهما غير مرتبطين خطياً فيقعان في المستوي :

$\vec{AM}(-1,3,2)$

$\vec{AN}(-1,0,0)$

المركبات غير متناسبة فالأشعة غير مرتبطة خطياً.

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \perp \vec{AN} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AN} = 0$

$-a = 0 \Rightarrow a = 0$

$\vec{n} \perp \vec{AM} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AM} = 0$

$-a + 3b + 2c = 0$

$3b = -2c \Rightarrow b = \frac{-2}{3}c$

نفرض $c=3$

$\vec{n}(0,-2,3)$ $A(1,3,0)$

$0(x-1) - 2(y-3) + 3(z-0) = 0$

$-2y + 3z + 6 = 0$

2. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من O وعمودي على المستوي (AMN)

بما أن $d \perp (AMN)$

$\Rightarrow \vec{u}_d = \vec{n}_{AMN} = (0,-2,3)$

$O(0,0,0)$

$$d: \begin{cases} x = \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

3. أثبت أن المستوي الذي معادلته $z-1=0$ هو المستوي المحوري للقطعة $[BM]$

المستوي المحوري لقطعة مستقيمة هو المستوي العمودي عليها وفي منتصفها

- $\vec{n}(0,0,1)$
- $\vec{BM}(0,0,2)$

$\Rightarrow \vec{n} = 2\vec{BM}$

$\Leftarrow$ الشعاعان متوازيان

$\Leftarrow$ المستوي عمودي على القطعة $[BM]$

نوجد إحداثيات I منتصف $[BM]$

$I\left(\frac{0+0}{2}, \frac{6+6}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (0,6,1)$

نعوض إحداثيات I في معادلة المستوي

$1-1=0$ محققة

$\Leftarrow$ المستوي $z-1=0$ هو المستوي المحوري للقطعة $[BM]$

SUBJECT: المسألة ١٣ المسألة ١٢

المسألة السادسة ص 154 :

1. اكتب معادلة الكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $\sqrt{3}$

مركز الكرة : $O(0,0,0)$

نصف قطرها : $R=\sqrt{3}$

معادلة الكرة :

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=\sqrt{3}^2$

$x^2+y^2+z^2=3$

2. تحقق أن المستوي P الذي معادلته :

$P: x-y+z+3=0$

يمس الكرة.

يقطع المستوي الكرة إذا كان $d<R$

مركز الكرة : $O(0,0,0)$

معادلة المستوي: $x-y+z+3=0$

نحسب المسافة :

$$dis(O,P)=\frac{|1(0)-1(0)+1(0)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{|3|}{\sqrt{3}}$$

$dis=\sqrt{3}$

$d=R=\sqrt{3}$

$\Leftarrow$ المستوي يمس الكرة (حالة خاصة من القطع)

المسألة السابعة ص 154 :

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

لتكن النقطة $A(1,-2,0)$ و المستوي

$P: x+2y+z-1=0$

احسب بعد النقطة A عن المستوي P ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P

$$dis=\frac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$dis=\frac{|1(1)+2(-2)+1(0)-1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}$$

$$dis=\frac{|1-4-1|}{\sqrt{6}}=\frac{|-4|}{\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{6}}$$

$dis=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

بما أن الكرة تمس المستوي $\Leftarrow d=R$

مركز الكرة : $A(1,-2,0)$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-z_0)^2=\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2$

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=\frac{24}{9}$

16 المسألة

$A(0,0,0)$ $\quad$ $C(3,3,0)$

$B(3,0,0)$ $\quad$ $E(0,0,3)$

$D(0,3,0)$

$\vec{EB}(3,0,-3)$

$\vec{EC}(3,3,-3)$

$\vec{n}(a,b,c) \Rightarrow 3a - 3c = 0$

$3a + 3b - 3c = 0$

من ① نجد $a = c$

نفرض $\boxed{c=1} \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow \boxed{b=0}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}(1,0,1) \\ E(0,0,3) \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{x + z - 3 = 0}$$

$$d \begin{cases} A(0,0,0) \\ \vec{u} = \vec{n}(1,0,1) \end{cases} \quad d: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}$$

/ /

$H\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$

لنوجد A' مسقط A على المستوي EBC

▪ نوجد المستقيم المار من A(0,0,0) ويعامد المستوي

$\vec{u} = \vec{n}(1,0,1)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

نعوض $t + t - 3 = 0$

$t = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow A'\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right) = H$

$h = dis(A, EBC) = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$S_{EBC} = \frac{EB \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{18} \quad 3}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

$V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \frac{3}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{9\cancel{\sqrt{2}}}{2}$

$= \boxed{\frac{9}{2}}$