

f غير قابل للاشتقاق عند الصفر (يقبل مماساً شاقولياً $x = 0$)

السؤال 5

حسب تعريف العدد المشتق نعرف التابع :

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$g(x) = \frac{\frac{|x| + 2}{x^2 + 1} - 2}{x - 1}$$

بالتوحيد و الاختزال :

$$g(x) = \frac{|x| - 2x^2}{x(x^2 + 1)}$$

نميز حالتين :

حالة: $x \rightarrow 0^+$

$$g(x) = \frac{x - 2x^2}{x(x^2 + 1)} = \frac{x(1 - 2x)}{x(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{1 - 2x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$$

f قابل للاشتقاق عند الصفر ... من اليمين و

$$f'(0^+) = 1$$

حالة: $x \rightarrow 0^-$

$$g(x) = \frac{-x - 2x^2}{x(x^2 + 1)} = \frac{-1 - 2x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1$$

f قابل للاشتقاق عند الصفر ... من اليسار و

$$f'(0^-) = -1$$

لكن بما أن $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ أي أن f غير

قابل للاشتقاق عند الصفر.

معادلة نصف المماس من اليمين:

$$T_+: y = f'(0^+)(x - 0) + f(0)$$

$$y = 1x + 2 = x + 2$$

السؤال 1

$$f(x) = \frac{1}{3 + 2 \cos x}$$

-1

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-2 \leq \cos x \leq 2$$

$$1 \leq 3 + 2 \cos x \leq 5$$

$$1 \geq \frac{1}{3 + 2 \cos x} \geq \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1$$

$\Rightarrow f$ محدود

-2 لدينا $\frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1$

$$\frac{x^2}{5} \leq x^2 f(x) \leq x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{5} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0$$

حسب نظريات الإطاحة

السؤال 3

(1) شرط الاستمرار عند الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

• حساب الصورة

$$f(0) = m$$

• حساب النهاية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} (\ln x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x \ln x}{2} - \frac{x}{2} \right] = 0 - 0 = 0$$

حسب شرط الاستمرار $m = 0$

(2) نعرف التابع:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{2} (\ln x - 1) - 0}{x}$$

$$= \frac{1}{2} (\ln x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

نحدد نصف قطر المجال

$$\varepsilon = b - l = 2.01 - 2 = 0.01 = \frac{1}{100}$$

$$\begin{aligned} |f(x) - l| &< \varepsilon \\ \left| \frac{2e^x - 3}{e^x - 1} - 2 \right| &< \frac{1}{100} \\ \left| \frac{2e^x - 3 - 2e^x + 2}{e^x - 1} \right| &< \frac{1}{100} \\ \left| -\frac{1}{e^x - 1} \right| &< \frac{1}{100} \\ e^x - 1 &> 100 \\ e^x &> 101 \\ x &> \ln(101) \end{aligned}$$

نختار $A = \ln(101)$

السؤال 11

-1

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 2 \cos^2 x}{x} \\ &= \frac{x^2}{x} + \frac{2 \cos^2 x}{x} = x + \frac{2 \cos^2 x}{x} \end{aligned}$$

نفرض $\Delta: y = x$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2 \cos^2 x}{x}$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

$$0 \leq 2 \cos^2 x \leq 2$$

السعي نحو $-\infty$ نقسم على $x > 0$

$$0 \geq \frac{2 \cos^2 x}{x} \geq \frac{2}{x}$$

حسب الإحاطة

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

Δ مقارب مائل عند $-\infty$

-2

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2 \cos^2 x}{x} < 0$$

C تحت Δ

السؤال 7

$$f(x) = 2x + E(x) ; l = [0,2]$$

(1) كتابة f بعبارة مستقلة :

$$f(x) = \begin{cases} 2x ; [0,1[\\ 2x + 1 ; [1,2[\\ 6 ; x = 2 \end{cases}$$

(2) شرط الاستمرار عند $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} f(1) = 3 \\ 2 \end{cases} \left(\begin{array}{l} \text{غير مستمر} \\ \text{عند } (1) \end{array} \right)$$

\Leftarrow غير مستمر على المجال

(3) الرسم :

(4) حساب النهاية:

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$3x - 1 < 2x + E(x) \leq 3x$$

$$\frac{3x - 1}{x^2 + 1} < \frac{f(x)}{x^2 + 1} \leq \frac{3x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = 0 \text{ حسب الإحاطة}$$

السؤال 9

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

-1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$f(x) = \frac{e^x \left(2 - \frac{3}{e^x} \right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2$$

-2 نحدد مركز المجال $l = 2$

$$f(x) - y_{\Delta} \leq 0$$

Δ تحت C

(3ط)

$$\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} - 1 \leq 0$$

≤ 1

 Δ تحت C

السؤال 15

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad -1$$

$$4\left(x^2 + x + \frac{5}{4}\right) \quad -2$$

$$4\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right)$$

$$4\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)$$

$$4\left(\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2 + 1\right)$$

$$4\left(\frac{(2x+1)^2}{4} + 1\right)$$

$$(2x+1)^2 + 4$$

$$f(x) = \sqrt{(2x+1)^2 + 4}$$

-3

$$h(x) = f(x) - \sqrt{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(2x+1)^2 + 4} - \sqrt{(2x+1)^2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{(2x+1)^2 + 4} + \sqrt{(2x+1)^2}}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (h(x)) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - \sqrt{(2x+1)^2} = 0$$

-4

$$\Rightarrow y_{\Delta} = \sqrt{(2x+1)^2}$$

$$= |2x+1|$$

السؤال 13

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = +\infty - 1$$

-2

$$f(x) - y_{\Delta} = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x - 1$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$f(x) - y_{\Delta} = \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} - 1$$

$$= \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} - 1$$

لأن السعي ($x \rightarrow +\infty$)

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_{\Delta}) = 0$$

 Δ مقارب مائل عند $+\infty$

الوضع النسبي:

(1ط) دائماً شغالة

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

$$x = \sqrt{x^2+1}$$

بشرط $x \geq 0$ نربع:

$$x^2 = x^2 + 1$$

$$0 = 1$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y_{\Delta}$	-----	

الوضع

 Δ تحت C

النسبي

(2ط)

$$x \leq \sqrt{x^2+1}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \leq 0$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$g'(x) = 0$ التابع g ثابت

ملاحظة: التابع الثابت يساوي صورة أي

نقطة منه أي:

$$g(x) = g(1)$$

$$g(x) = f(1) + f(1)$$

$$= 2f(1) = 2 \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{g(x) = \frac{\pi}{2}}$$

نعوض:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} - f(0) = \frac{\pi}{2}$$

السؤال 22

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = -1 \quad x = 1$$

$$f(-1) = 3 \quad f(1) = -1$$

$$= \begin{cases} 2x + 1 ; (x \rightarrow +\infty) \\ -2x - 1 ; (x \rightarrow -\infty) \end{cases}$$

$+\infty$ مقارب عند $\Delta_1: y = 2x + 1$

$-\infty$ مقارب عند $\Delta_2: y = -2x - 1$

الوضع النسبي:

$$= \frac{f(x) - y_{\Delta}}{\sqrt{(2x+1)^2 + 4} - \sqrt{(2x+1)^2}}$$

$$\sqrt{(2x+1)^2 + 4} \geq \sqrt{(2x+1)^2}$$

$$\sqrt{(2x+1)^2 + 4} - \sqrt{(2x+1)^2} \geq 0$$

C فوق Δ_1 و Δ_2

-5

$$f'(x) = \frac{8x + 4}{2\sqrt{4x^2 + 4x + 5}}$$

$$= \frac{4x + 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}}$$

الآن : نلاحظ أن :

$$g(x) = f(\sin x)$$

$$g'(x) = (\cos x) f'(\sin x)$$

$$g'(x) = \cos x \frac{4(\sin x) + 2}{\sqrt{4(\sin x)^2 + 4(\sin x) + 4}}$$

السؤال 17

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 + 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)):$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 + e^2 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = 5 + e^2 \quad \bullet$$

السؤال 20

$$\bullet \text{ التابع } \frac{1}{x} \text{ اشتقاقي على } \mathbb{R}^*$$

$$\bullet \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftarrow g \text{ اشتقاقي على } \mathbb{R}^*$$

$$g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$g'(x) = f'(x) + \left(-\frac{1}{x^2}\right) f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \sqrt{x^2 + 1} + x = f(x) = l_2$$

-2 نشق طرفي العلاقة السابقة.

$$\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} f'(x) + f''(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} = f'(x)$$

نضرب بـ $\sqrt{x^2 + 1}$:

$$xf'(x) + (x^2 + 1)f''(x) = \sqrt{x^2 + 1}f'(x)$$

$$(x^2 + 1)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$$

-3 حسب قاعدة الاشتقاق المركب:

$$g'(x) = \cos x f'(\sin x)$$

$$= \cos x \frac{\sqrt{\sin^2 x + 1} + \sin x}{\sqrt{\sin^2 x + 1}}$$

السؤال 25

$$f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 + \ln x$$

$$f(e) = e \ln e = e$$

$$f'(e) = 1 + \ln e = 2$$

حسب تعريف العدد المشتق

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = f'(e)$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{x \ln x - e}{x - e} = 2$$

ملاحظة: عندما تكون حالة $\frac{0}{0}$ والمقام من

الشكل (المسعى - x)

- نغرض البسط كاملاً $g(x)$
- نطبق عليه قابلية الاشتقاق

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$$

نغرض $g(x) = e^x - e^2$

$$g'(x) = e^x$$

$$g(2) = 0$$

$$g'(2) = e^2$$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = g'(2)$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0 - - 0 +	+
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$

للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاث حلول على \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$$

$$= [0, +\infty[\setminus \{1\}$$

$$= [0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$f(0) = -1 - 0 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	---		---
$f(x)$	-1		$+\infty$

حل وحيد على المجال $]1, +\infty[$

السؤال 23

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1$$

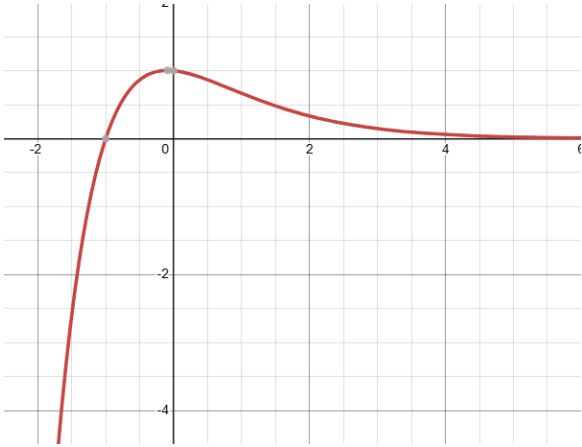
نوحد المقامات:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

الآن لنبدأ بإثبات العلاقة المطلوبة:

$$l_1 = \sqrt{x^2 + 1} f'(x)$$

$$= \sqrt{x^2 + 1} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$



التقاطع مع yy' نضع $x = 0$

السؤال 28

-1

$$p(x) = ax + b$$

$$f(x) = \frac{ax + b}{e^x}$$

$$y = \frac{ax + b}{e^x}$$

$$y' = \frac{ae^x - e^x(ax + b)}{e^{2x}}$$

$$= \frac{a - ax - b}{e^x}$$

$$y' = \frac{-ax + (a - b)}{e^x}$$

نعوض في E:

$$\frac{-ax + (a - b)}{e^x} + \frac{2ax + 2b}{e^x} = \frac{x}{e^x}$$

$$-ax + (a - b) + 2ax + 2b = x$$

$$ax + (a + b) = x$$

$$a = 1$$

$$a + b = 0$$

$$b = -1$$

$$p(x) = x - 1$$

-2

$$y' = -2y$$

$$y' = ay + b$$

$$a = -2 \quad b = 0$$

$$y = k e^{ax} - \frac{b}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} = e^2$$

السؤال 27

$$f(x) = (x + 1) \cdot 3^{-x}$$

$$f(x) = (x + 1)e^{\ln(3^{-x})}$$

$$= (x + 1) \cdot e^{-x \ln 3}$$

-1

$$f'(x) = e^{-x \ln 3} - \ln 3 e^{-x \ln 3} (x + 1)$$

$$f'(x) = e^{-x \ln 3} (1 - x \ln 3 - \ln 3)$$

-2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^{-x \ln 3} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty)0$$

$$f(x) = x e^{-x \ln 3} + e^{-x \ln 3}$$

$$= \frac{x}{e^{x \ln 3}} + \frac{1}{e^{x \ln 3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

نعدم المشتق:

$$1 - x \ln 3 - \ln 3 = 0$$

$$x \ln 3 = 1 - \ln 3 \Rightarrow x = \frac{1 - \ln 3}{\ln 3}$$

$$f\left(\frac{1 - \ln 3}{\ln 3}\right) = \left(\frac{1 - \ln 3}{\ln 3} + 1\right) e^{-\frac{1 - \ln 3}{\ln 3} \ln 3}$$

$$= \frac{1 - \ln 3 + \ln 3}{\ln 3} e^{-1 + \ln 3}$$

$$= \frac{1}{\ln 3} e^{-1} \cdot e^{\ln 3} = \frac{3}{e \ln 3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1 - \ln 3}{\ln 3}$	$+\infty$
f'	+++	0	---
f	$-\infty$	$\frac{3}{e \ln 3}$	0

نربع:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- -	0
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

حدية صغرى $A(1, -1)$

f مستمر على $]0,1[$

f متناقص تماماً على $]0,1[$

$0 \in f(]0,1[) =]-1, +\infty[$

← للمعادلة حل وحيد على المجال $]0,1[$

f مستمر على $]1, +\infty[$

f متزايد تماماً على $]1, +\infty[$

$0 \in f(]1, +\infty[) =]-1, +\infty[$

← للمعادلة حل وحيد على $]1, +\infty[$

• **الحصر:**

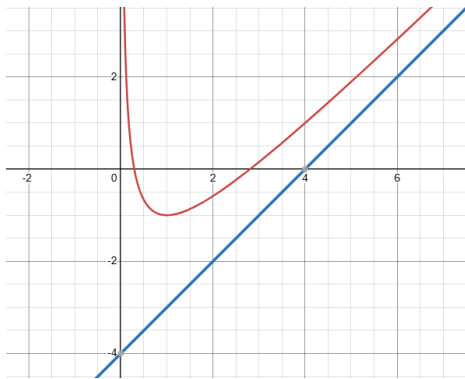
الحل الأول ينتمي إلى $]0,1[$

$$f(1) = -1 < 0$$

$$f(2) = -2 + \sqrt{2} < 0$$

$$f(3) = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}} > 0$$

الحل الثاني يقع في $]2,3[$



$$S = \int_3^4 (f(x) - y_\Delta) dx = \int_3^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_3^4 2x^{-\frac{1}{2}} dx$$

-3

$$y = k e^{-2x} + \frac{x-1}{e^x}$$

$$y' = -2k e^{-2x} + \frac{e^x - e^x(x-1)}{(e^x)^2}$$

$$y' = -2k e^{-2x} + \frac{x+2}{e^x}$$

$$y' = -2k e^{-2x} + (x+2)e^{-x}$$

نعوض في E

$$-2x e^{-2x} + (x+2)e^{-x} + 2k e^{-2x} + (2x-2)e^{-x} = x e^{-x}$$

$$x+2+2x-2 = x$$

$$3x = x$$

غير محققة

السؤال 30

$$f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4 ; I =]0, +\infty[$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

Δ مقارب مائل عند $+\infty$

الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

C_f فوق Δ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو الأعلى C يمين

مقاربه.

f اشتقاقي على I

$$f'(x) = 1 + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2}{x}$$

$$= 1 - \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$x\sqrt{x} - 1 = 0$$

$$x\sqrt{x} = 1$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ نضع}$$

نبدل كل x بـ y وكل y بـ x :

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

نعزل:

$$\begin{aligned} 2x &= e^y - e^{-y} \\ 2xe^y &= e^{2y} - 1 \\ e^{2y} - 2xe^y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

نضع $t = e^y$

$$\begin{aligned} t^2 - 2xt - 1 &= 0 \\ \Delta &= 4x^2 - 4(1)(-1) = 4x^2 + 4 \\ \Delta &= 4(x^2 + 1) > 1 \end{aligned}$$

للمعادلة حلان:

أما:

$$\begin{aligned} t &= \frac{2x + 2\sqrt{x^2 + 1}}{2} \\ t &= x + \sqrt{x^2 + 1} \\ e^y &= x + \sqrt{x^2 + 1} \\ y &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \end{aligned}$$

أو:

$$\begin{aligned} t &= \frac{2x + 2\sqrt{x^2 + 1}}{2} \\ e^y &= x - \sqrt{x^2 + 1} < 0 \end{aligned}$$

التقابل العكسي

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ y &= f'(0)(x - 0) + f(0) \quad -5 \\ &= 1x + 0 \\ &= x \end{aligned}$$

الوضع النسبي:

$$f(x) - y_T = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - x$$

نفرض:

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - x$$

وندرس اطراده:

g اشتقاقي على \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \\ &= \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2} \end{aligned}$$

$$= \left[2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_3^4 = [4\sqrt{x}]_3^4 = 8 - 4\sqrt{3}$$

$$v = \pi \int_1^4 g^2(x) dx$$

$$= \pi \int_1^4 \frac{4}{x} dx$$

$$= \pi [4 \ln|x|]_1^4$$

$$\begin{aligned} \pi [4 \ln(4) - 4 \ln(1)] &= 4\pi \ln(4) \\ &= 8\pi \ln(2) \end{aligned}$$

السؤال 34

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} \\ &= \frac{-[e^x - e^{-x}]}{2} \end{aligned}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

f فردي

C متناظر للمبدأ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

f اشتقاقي على \mathbb{R}

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

f متزايد تماماً.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	++++	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

-3 f مستمر ومتزايد تماماً على \mathbb{R} و

$$m \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

إذن للمعادلة

$$f(x) = m$$

حلاً وجيداً مهما تكن

$$m \in \mathbb{R}$$

-4 بما أن f مستمر ومتزايد تماماً على \mathbb{R}

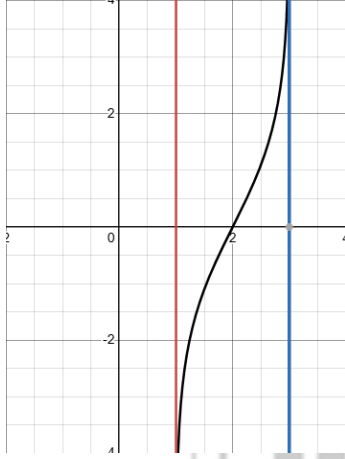
f تقابل \Leftarrow

$$= \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) + \ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right)$$

$$= \ln(1) = 0 = 2b = l_2$$

I مركز تناظر

-3



$\forall m \in \mathbb{R}$ لها حل وحيد $f(x) = m$

$$\ln\left(\frac{xe^m + x}{3e^m + 1}\right) = 0$$

$$\frac{xe^m + x}{3e^m + 1} = 1$$

$$xe^m + x = 3e^m + 1$$

$$x - 1 = 3e^m - xe^m$$

$$x - 1 = (3 - x)e^m$$

$$\frac{x-1}{3-x} = e^m$$

$$\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) = m$$

$$g(x) = \ln(x-1) - \ln(3-x) \quad -4$$

$$= \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) = f(x)$$

نوجد D_g :

$$D_g =]1,3[= D_f$$

C_g ينطبق على C_f

$$= \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{2e^x}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

$$(e^x - 1)(e^x - 1) = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$g(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+++	0	+++
$g(x)$	↗ 0		↘

السؤال 35

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) ; I =]1,3[$$

-1

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$$

$x = 3$ مقارب شاقولي نحو الأعلى C يسار مقاربه

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو الأدنى C يمين مقاربه

f اشتقاقي على I:

$$f(x) = \ln(x-1) - \ln(3-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{-1}{3-x}$$

$$= \frac{3-x+x-1}{(x-1)(3-x)} = \frac{2}{(x-1)(3-x)} > 0$$

x	1	3	
$f'(x)$			+++
$f(x)$			↗ $+\infty$

I(2,0) -2

لدينا

$$2a = 4 \quad 2b = 0$$

الشرط (1):

$$\forall x \in]1,3[\Rightarrow 2a - x \in]1,3[$$

$$x \in]1,3[$$

$$-x \in]-3, -1[$$

نضيف 4:

$$4 - x \in]1,3[= D_f$$

محقق

الشرط (2):

$$f(x) + f(2a - x) = 2b$$

$$l_1 = f(x) + f(4 - x)$$

السؤال 40

$$f(x) = \ln(1-x)$$

$$E(n): f^{(n)}(x) = \frac{-(-n-1)!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x}$$

$$f''(x) = \frac{-(-1)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2}$$

$$f'''(x) = -\frac{2}{(1-x)^3}$$

• نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$f'(x) = -\frac{0!}{1-x} = -\frac{1}{1-x}$$

• نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{-(-n-1)!}{(1-x)^{n+1}} \dots \text{(الفرض)}$$

• نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{-n!}{(1-x)^{n+2}} \dots \text{(الطلب)}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$f^{(n)}(x) = \frac{-(-n-1)!}{(1-x)^{n+1}}$$

نشتق:

$$[f^{(n)}(x)]' = \frac{-n(1-x)^{n-1}(-1)[-(-n-1)!]}{(1-x)^{2n+1}}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{-n!}{(1-x)^{n+2}}$$

وهو المطلوب

$E(n)$ صحيحة: $n \geq 1$

السؤال 41

-1

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \ln\left(e^{-x}\left(1 - \frac{1}{e^{-x}}\right)\right) \quad -2$$

$$= \ln(e^{-x}) + \ln(1 + e^x)$$

$$f(x) = -x + \ln(e^x + 1)$$

-3 نضع $y = -x$

السؤال 33

$$m_T = m_d$$

$$f'(x) = -2$$

$$\frac{(2x-4)(x+1) - x^2 + 4x - 1}{(x+1)^2} = -2$$

$$2x^2 + 2x - 4x - 4 - x^2 + 4x - 1 = -2(x+1)^2$$

$$x^2 + 2x - 5 = -2(x^2 + 2x + 1)$$

$$3x^2 + 6x - 3 = 0$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8 > 0$$

لها حلان

C_f يقبل مماسين موازيين للمستقيم $t = -2x$

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

بما أنه يمر من المبدأ $(0,0)$

$$0 = f'(a)(-a) + f(a)$$

$$af'(a) = f(a) \dots (*)$$

نشتق:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2+x)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\frac{2a^2+a}{a^2+a+1} = a^2+a$$

$$2a^2+a = a^4+a^3+a^2+a^3+a^2+a$$

$$a^4+2a^3=0$$

$$a^3(a+2)=0$$

إما $a = -2$

$$f(-2) = 2$$

عند $a = -2$ مماس C_f للخط $t = -2x$ يمر من المبدأ

أو $a = 0$

$$f(0) = 0$$

مرفوض لأن: المماس في المبدأ

السؤال 30

$$f(x) = \sin(3x)$$

$$f'(x) = 3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = 3^2 \sin\left(3x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = 3^3 \sin\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

.....كامل لحالك....

$$= \frac{\ln(e)}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$m_T = M_{(BD)} = -\frac{1}{2}$$

$$T \setminus (BD)$$

السؤال 43

$$\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$$

$$\ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$$

نضع

$$g(x) = \ln(x+1) - \sqrt{x+1}$$

معرف على $]-1, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{x+1}}{2(x+1)}$$

$$g'(x) = 0$$

$$2 - \sqrt{x+1} = 0$$

$$2 = \sqrt{x+1}$$

$$4 = x+1$$

$$x = 3$$

$$g(3) = \ln(4) - 2$$

$$= \ln(2^2) - 2 = 2 \ln 2 - 2$$

x	-1	3	$+\infty$
$g'(x)$		+++	---
$g(x)$		$2 \ln 2 - 2$	

نلاحظ من جدول التغيرات أن

$$]-1, +\infty[\text{ على } g(x) \leq 2 \ln 2 - 2 < 0$$

$$]-1, +\infty[\text{ على } g(x) < 0$$

$$]-1, +\infty[\text{ على } \ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$$

$$]-1, +\infty[\text{ على } \ln(x+1) < \sqrt{x+1}$$

مختارات من المسائل العامة

السؤال 46

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}; I =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad -1$$

$$+\infty \text{ مقارب أفقي عند } y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$f(x) - y_d = \ln(e^x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y_d) = 0$$

$-\infty$ مقارب مائل عند d

الوضع النسبي

$$1 + e^x > 1$$

$$\ln(1 + e^x) > 0$$

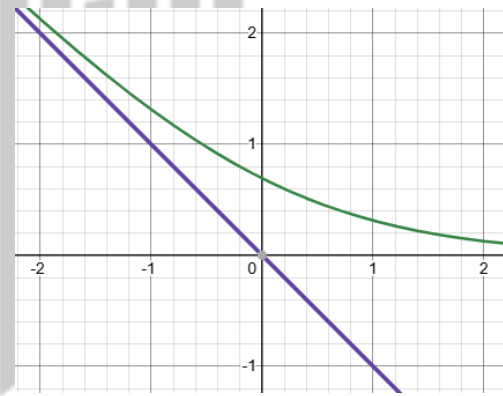
$$f(x) - y_d > 0$$

d فوق C

-4

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	---	---
$f(x)$	$+\infty$	0



-5

$$A(0, \ln 2)$$

$$B(1, \ln(e^{-1} + 1))$$

$$D(-1, \ln(e + 1))$$

المماس في A وليكن T يوازي المستقيم (BD)

شروط توازي T و (BD) هو

$$m_T = m_{(BD)}$$

$$f'(0) = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} ???$$

$$m_T = f'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$m_{(BD)} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{\ln(e + 1) - \ln(e^{-1} + 1)}{-2}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{e+1}{\frac{1}{e}+1}\right)}{-2} = \frac{\ln\left(\frac{e+1}{e}\right)}{-1}$$

$$g(x) = f(\cos x) ; I =]0, \frac{\pi}{2}[$$

$\cos x$ اشتقاقي على $]0, \frac{\pi}{2}[$

$$\cos x \in]0, +\infty[\\ \cos x > 0$$

محقق على $]0, \frac{\pi}{2}[$

حسب قاعدة الاشتقاق المركب:

$$g'(x) = -\sin x f'(\cos x) \\ = -\sin x \frac{1 - \ln \cos x}{\cos^2 x}$$

$$e < \pi \quad -5$$

f متناقص على $]e, +\infty[$

$$f(e) > f(\pi)$$

$$\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}$$

$$\pi \ln e > e \ln \pi$$

$$\ln(e^\pi) > \ln(\pi^e)$$

$$e^\pi > \pi^2$$

$$h(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad -6$$

$$= \frac{1}{x} (-\ln x) = -\frac{\ln x}{x}$$

$$h(x) = -f(x)$$

تذكير: بخصوص الاستنتاجات للخطوط البيانية

$$h(x) = -f(x) \quad -1$$

C_h نظير C_f بالنسبة لـ xx'

$$h(x) = f(-x) \quad -2$$

C_h نظير C_f بالنسبة لـ yy'

$$h(x) = -f(-x) \quad -3$$

C_h نظير C_f للمبدأ

$$h(x) = f(x) + k \quad -4$$

C_h انسحاب لـ C_f على yy' قدره k

السؤال 47

أولاً:

$$g(x) = x^2 + \ln x - 1 ; I =]0, +\infty[$$

-1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو الأدنى C يمين

مقاربه

f اشتقاقي على I

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

نعدم:

$$f'(x) = 0$$

$$1 - \ln x = 0$$

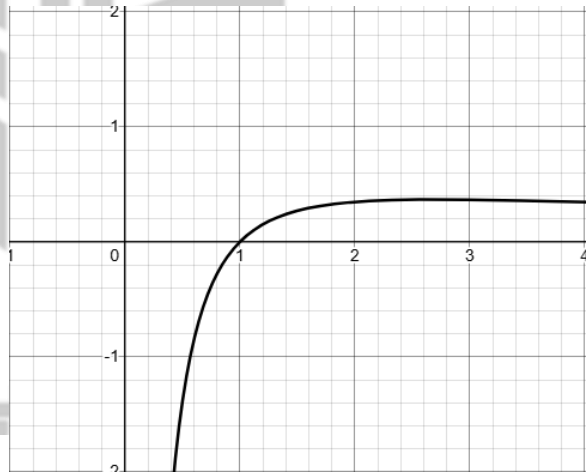
$$\ln x = 1$$

$$x = e$$

$$f(e) = \frac{1}{e}$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

-2



من أجل $1, \frac{1}{e} [m \in]$ يكون للمعادلة $f(x) = m$

حلان مختلفان a, b

$$f(a) = f(b)$$

$$\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

-3 نلاحظ من جدول f أن f متناقص تماماً على

المجال $[3, +\infty[$

$(u_n)_{n \geq 3}$ متناقصة تماماً

-4

$$f(x) - y_{\Delta} = -\frac{\ln x}{x} \quad -4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_{\Delta}) = 0$$

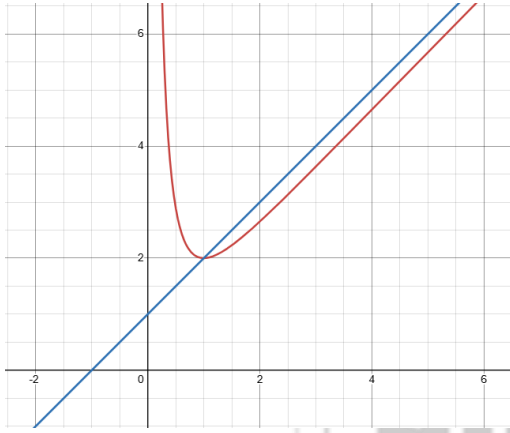
Δ مقارب مائل

$$f(x) - y_{\Delta} = 0$$

$$\ln x = 0$$

$$x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$-\frac{\ln x}{x}$		++	--
الوضع النسبي		C فوق Δ	C تحت Δ



السؤال 49

$$f(x) = (x + 1) \ln(x + 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = (-1)(-\infty) = +\infty$$

$x = -2$ مقارب شاقولي نحو الأعلى C يمين مقاربه

$$f'(x) = \ln(x + 2) + \frac{x+1}{x+2} \quad -2$$

$$f'(x) = g(x)$$

$$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

$$y = 0$$

لاحظ:

$$f'(-1) = 0$$

أي:

$$g(-1) = 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2} > 0$$

x	-2	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+++++	
$g(x)$			0

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x} > 0$$

على $]0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+++
$g(x)$		$-\infty \rightarrow +\infty$

g -2 مستمر ومتزايد تماماً على $]0, +\infty[$ و

$$0 \in g(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$$

للمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد α على $]0, +\infty[$

$$g(1) = 0$$

$\alpha = 1$ هو الحل الوحيد.

وبالتالي نجد أن

$$g(x) < 0 \text{ على }]0, 1[$$

$$g(x) > 0 \text{ على }]1, +\infty[$$

$$g(x) = 0 \text{ عندما } x = 1$$

ثانياً:

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$$

-1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو الأعلى C يمين مقاربه

f اشتقاقي على $]0, +\infty[$ -2

$$f'(x) = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

نعدم: $g(x) = 0$

$$x = 1$$

$$f(1) = 2$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+++
$f(x)$		$+\infty \rightarrow 2$	$+\infty$

$A(1,2)$ حدية صغرى -3

العماس الأفقي $y = 2$

-3 نعدم:

$$1 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \quad x = -1$$

$$f(1) = \frac{4}{e} \quad f(-1) = 0$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$--$	0	$+$	0
$f(x)$	$+\infty$	0	$\frac{4}{e}$	0



$$g(x) = (x - 1)^2 e^x \quad -5$$

لدينا:

$$f(-x) = \frac{(-x + 1)^2}{e^{-x}}$$

$$= (-x + 1)^2 e^x$$

$$= (x - 1)^2 e^x$$

$$g(x) = f(-x)$$

C_g نظير C_f بالنسبة لـ yy'

$$f(x) > 0 \quad -6$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

السؤال 52

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

-1

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ln(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

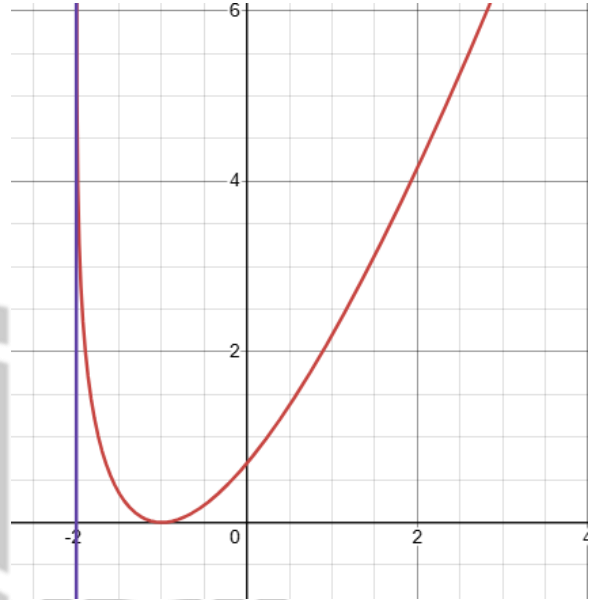
$$f(x) = \ln(2x) - \ln(x-1) \quad -2$$

$$] -2, -1[\text{ على } g(x) < 0$$

$$] -1, +\infty[\text{ على } g(x) > 0$$

$$x = -1 \text{ عندما } g(x) = 0$$

x	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$ $	$--$	$++$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$



$$u_n = (n + 1) \ln(n + 2) \quad -5$$

$$u_n = f(n) ; n \geq 0$$

f متزايد تماماً على $[0, +\infty[$

$(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً

السؤال 50

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\frac{\infty}{0} = +\infty \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) : \frac{\infty}{\infty}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي عند $+\infty$

-2 f اشتقاقي على \mathbb{R}

$$f'(x) = \frac{2(x+1)e^x - e^x(x+1)}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(1-x)}{e^x} = \frac{(1+x)(1-x)}{e^x}$$

$$f'(x) = (1-x^2)e^{-x}$$

-3 شروط المماس المشترك عند a :

$$\begin{aligned} f(a) - g(a) &= 0 \\ f'(a) - g'(a) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) - g(0) &= h(0) = 0 \\ f'(0) - g'(0) &= h'(0) = 0 \end{aligned}$$

C_g و C_f يقبلان مماساً مشتركاً عند الصفر.

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x - 0) + f(0) \\ y &= x \end{aligned}$$

$$S = \int_0^1 f(x) - g(x) \quad -4$$

$$= \int_0^1 \left(\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \right) dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \ln(x+1)}_{S_1} - \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{x+1}}_{S_2}$$

$$S_1 = \int_0^1 \ln(x+1)$$

$$u = \ln(x+1) \Rightarrow u' = \frac{1}{x+1}$$

$$v' = 1 \Rightarrow v = x$$

$$S_1 = [x \ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}$$

$$S_1 = [x \ln(x+1)]_0^1 - [x - \ln(x+1)]_0^1$$

$$= \ln(2) - 0 - [(1 - \ln(2)) - (0)]$$

$$= \ln(2) - 1 + \ln(2)$$

$$S_1 = 2 \ln 2 - 1$$

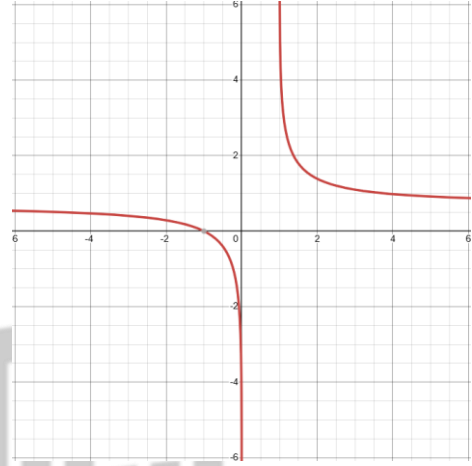
$$S_2 = 1 - \ln 2$$

$$S = S_1 - S_2 = 2 \ln 2 - 1 - 1 + \ln 2$$

$$= 3 \ln 2 - 2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{2x} - \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{x-1-x}{x(x-1)} = -\frac{1}{x(x-1)} < 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	---			---
$f(x)$	$\ln 2$	$-\infty$	$+\infty$	$\ln 2$



السؤال 54

$$f(x) = \ln(x+1)$$

$$g(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$I =]-1, +\infty[$$

$$h(x) = f(x) - g(x) \quad -1$$

$$h(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x}{(x+1)^2}$$

$$h'(x) = 0$$

$$x = 0$$

$$h(0) = 0$$

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$		--	++
$h(x)$		0	

من جدول التغيرات

$$] -1, +\infty[\text{ على } h(x) \geq 0,$$

$$h(x) \geq 0 \quad -2$$

$$f(x) - g(x) \geq 0$$

$$f(x) \geq g(x)$$

C_g فوق C_f

$$= \frac{x(\frac{3}{2} - \ln x) - 0}{x - 0} = \frac{3}{2} - \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$$

ف عند قباله الى حقاقتنا في الصفر...

القيمة التي نريد...

يقبلها اننا قولنا $x=0$

السؤال السادس...

$$f(x) = \frac{|x| + 3x + 1}{x^2 + 1} \quad \text{طريقة}$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| + 3x + 1 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{|x| + 3x - x^2}{x(x^2 + 1)}$$

$$g(x) = \frac{|x| + 3x - x^2}{x(x^2 + 1)}$$

من اليمين \leftarrow \rightarrow من اليسار

$$\frac{4x - x^2}{x(x^2 + 1)} \quad \frac{2x - x^2}{x(x^2 + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{0}{0} \text{ ج.ع.ج}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{0}{0} \text{ ج.ع.ج}$$

$$\frac{x(4-x)}{x(x^2+1)}$$

$$\frac{x(2-x)}{x(x^2+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \frac{2}{1} = 2$$

$$f(0^+) = 4$$

$$f(0^-) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$$

$$T: y = f(0^+)(x-0) + f(0^-) \\ = 2(x) + 1 \Rightarrow y = 2x + 1$$

حل التماذج المزدوجة

السؤال الثاني...

$$0 < \sin^2 x < 1 \quad \text{طريقة}$$

$$2 \leq 2 + \sin^2 x \leq 3 \quad \text{نضرب في 2}$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2 + \sin^2 x} \geq \frac{1}{3} \quad \text{نعكس}$$

$$2 \geq \frac{4}{2 + \sin^2 x} \geq \frac{4}{3} \quad \text{نضرب بـ 4}$$

$$\left[\frac{4}{3}, 2 \right] \quad \text{في روبيك}$$

طريقة من لطيف ابي...

$$2 \geq \frac{4}{2 + \sin^2 x} \geq \frac{4}{3}$$

$$2x^2 \geq \frac{4x^2}{2 + \sin^2 x} \geq \frac{4}{3}x^2 \quad \text{نضرب بـ } x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{3}x^2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{2 + \sin^2 x} = \infty$$

السؤال الرابع...

طريقة نظمت شرط ان...

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2}x - x \ln x = m - 3$$

$$0 = m - 3$$

$$m = +3$$

طريقة لفرف انما يح $g(x)$

$$\text{طريقة } g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

السؤال الثاني عشر...

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{\infty}{\infty}$$

طريقة ϵ - δ ع.ع.ع

$$f(n) = \frac{\ln n (\frac{2}{\ln n} + 1)}{\ln n (\frac{1}{\ln n} + 1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{1}{1} = 1$$

$l=1$
طريقة عند مرتبة لجمال...
حدد نصف قطر لجمال...
 $l=1 \Rightarrow \epsilon = b-l$
 $= 1,2 - 1 = 0,2 = \frac{2}{10}$

$$|f(n) - l| < \epsilon$$

$$\left| \frac{2 + \ln n}{1 + \ln n} - 1 \right| < \frac{2}{10}$$

$$\left| \frac{2 + \ln n - 1 - \ln n}{1 + \ln n} \right| < \frac{2}{10}$$

$$\left| \frac{1}{1 + \ln n} \right| < \frac{2}{10} \Rightarrow \frac{1}{1 + \ln n} < \frac{2}{10}$$

$$1 + \ln n > \frac{10}{2} \Rightarrow \ln n > \frac{10}{2} - 1$$

$$\ln n > 4 \Rightarrow n > e^4$$

$A = e^4$ اختبار

السؤال الثالث عشر...

$$f(n) = 3n + 1 + \frac{2|\sin n|}{n}$$

Dirig = $3n + 1$ طريقة

$$f(n) - y_0 = 3n + 1 + \frac{2|\sin n|}{n} - 3n - 1$$

$$f(n) - y_0 = \frac{2|\sin n|}{n}$$

$0 \leq |\sin n| \leq 1$
 $0 \leq 2|\sin n| \leq 2$ تقريب ب 2

السؤال الثامن...

$$f(n) = \begin{cases} -n & \in [0, 1[\\ 2-n & \in [1, 2[\end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} f(n) = f(1) = -1 + 3 = 2$$

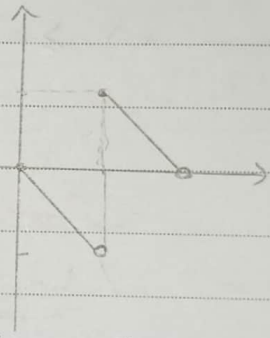
غير مستمر على المجال $[0, 2[$ طريقة

$$y = -x$$

x	0	1
y	0	-1

$$y = 2 - x$$

x	1	2
y	1	0



$$x-1 < f(n) \leq x$$
 طريقة

$$2n-2 < 2f(n) \leq 2n$$
 تقريب ب 2

$$x-2 < 2f(n) - n \leq x$$
 طرح x

$$\frac{x-2}{n^2+1} < \frac{2f(n) - n}{n^2+1} \leq \frac{x}{n^2+1}$$
 تقريب ب $\frac{1}{n^2+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x-2}{n^2+1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n^2+1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2f(n) - n}{n^2+1} = 0$$

$$f(x) - y_0 = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}}} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - y_0 = 0$$

مقارب مائل الخط C

طابق # اولوج ليني

$$f(x) - y_0 = \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9}} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 9} \geq -x$$

$$1 \geq \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + 1 \geq 0$$

C فوق

السؤال السادس عشر...

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad / \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{طابق}$$

$$h(x) = f(x) - \sqrt{(x+3)^2} \quad \text{طابق}$$

$$= \sqrt{x^2 + 6x + 10} - \sqrt{(x+3)^2}$$

بالصيغة القابلية $x^2 + 6x + 10$ ليكتب

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + 10 = (x+3)^2 + 1$$

... h(x) العودة لـ

$$h(x) = \sqrt{(x+3)^2 + 1} - \sqrt{(x+3)^2}$$

$$h(x) = \frac{(\sqrt{(x+3)^2 + 1} - \sqrt{(x+3)^2})(\sqrt{(x+3)^2 + 1} + \sqrt{(x+3)^2})}{\sqrt{(x+3)^2 + 1} + \sqrt{(x+3)^2}}$$

$$h(x) = \frac{(x+3)^2 + 1 - (x+3)^2}{\sqrt{(x+3)^2 + 1} + \sqrt{(x+3)^2}}$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+3)^2 + 1} + \sqrt{(x+3)^2}}$$

$$0 \leq \frac{2|\sin x|}{x} \leq \frac{2}{x} \quad \text{بقسمة x}$$

↓

0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2|\sin x|}{x} = 0$$

مقارب مائل على ∞

$$f(x) - y_0 = \frac{2|\sin x|}{x} \geq 0 \quad \text{طابق}$$

C فوق

السؤال الرابع عشر...

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \quad \text{طابق}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{ح.ع.ح}$$

$$f(x) = x \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-\infty}{\infty} \quad \text{ح.ع.ح}$$

$$f(x) = x \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty + 0 = -\infty$$

$$f(x) - y_0 = \frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{x}{2} + 1 \quad \text{طابق}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + 1 = \frac{x}{-x\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{ع.ع.ع} \quad \text{ب) 3}$$

$$g(n) = \frac{e^n}{n} + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln n + e}{\ln n + 1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{ع.ع.ع}$$

تريد رسم التبعين بإفراج $\ln x$ على x طرقت

$$f(n) = \frac{\ln x (2 + \frac{e}{\ln x})}{\ln x (1 + \frac{1}{\ln x})} = \frac{2 + \frac{e}{\ln x}}{1 + \frac{1}{\ln x}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{e}{\ln x}}{1 + \frac{1}{\ln x}} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(g(n)) = 2$$

السؤال الواحد والعشرون

التابع $\sin u$ معرف على المجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ حيث $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

والتقارن على المجال $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$g'(n) = f'(\sin u) \cdot 1$$

$$g'(n) = \frac{\cos u}{\sqrt{1 - \sin^2 u}} \cdot 1$$

السؤال الرابع والعشرون

$$h_1 = \frac{x}{2} \int \frac{2x(\sqrt{x^4+1}) - \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}} \cdot x^2}{x^4+1} dx \quad \text{ب) (ن+1)}$$

$$= \frac{x}{2} \int \frac{4x(x^4+1) - 4x^3 \cdot x^2}{2\sqrt{x^4+1}} dx$$

$$= x \int \frac{x(x^4+1) - x^3 \cdot x^2}{\sqrt{x^4+1}} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = 0$$

$$h(n) = f(n) - \sqrt{(n+3)^2} \quad \text{طرق}$$

$f(n) - y_0$ بالمقارنة مع الفرق

$$y_0 = \sqrt{(n+3)^2} \quad \text{جذبات}$$

$$\begin{matrix} +\infty & & -\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ y = n+3 & & y = -n-3 \end{matrix}$$

$$D_1: y = n+3$$

$$D_2: y = -n-3$$

مقاربة عند $+\infty$ مقاربة عند $-\infty$

$$f(n) - y_0 = \sqrt{(n+3)^2+1} - \sqrt{(n+3)^2}$$

$$\sqrt{(n+3)^2+1} - \sqrt{(n+3)^2} \geq 0$$

$$\sqrt{(n+3)^2+1} \geq \sqrt{(n+3)^2}$$

$$\sqrt{(n+3)^2+1} - \sqrt{(n+3)^2} \geq 0$$

C ضوقة D_1 و D_2

$$f'(n) = \frac{2n+6}{2\sqrt{n^2+6n+10}} \quad \text{طرق ب)}$$

$$= \frac{2(n+3)}{2\sqrt{n^2+6n+10}} = \frac{n+3}{\sqrt{n^2+6n+10}}$$

$$g(n) = f(\sin u)$$

$$g'(n) = \cos u \cdot f'(\sin u)$$

$$= \cos u \cdot \frac{\sin u + 3}{\sqrt{\sin^2 u + 6 \sin u + 10}}$$

السؤال الثامن عشر

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = e \quad \text{ب) 11}$$

ب) من طلبك ابقيني

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = e \Rightarrow \lim_{x \rightarrow e} f(f(x)) = \frac{2+e}{e}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(f(x)) = \frac{2+e}{e}$$

السؤال الثالث والعشرون

$f(x) = 2^{x^2-2x}$ ط 1

$f(x) = e^{\ln 2^{x^2-2x}}$

$f(x) = e^{(x^2-2x) \cdot \ln 2}$

$f'(x) = (2x-2) \ln 2 + 0 [e^{(x^2-2x) \ln 2}]$

$f'(x) = (2x-2) \ln 2 \cdot e^{(x^2-2x) \ln 2}$ ط 2

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \cdot \infty = \infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \cdot \infty = \infty$

$f(x) = 2x-2 \cdot \ln e^{(x^2-2x) \ln 2} \cdot \ln 2$

$f'(x) = 0$

$2x-2=0$

$2x=2 \Rightarrow x=1$

$f(1) = \frac{1}{2}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	+
f(x)	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	∞

$= \frac{x^2(x^4+1) - x^3 \cdot x^3}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{x^2(x^4+1) - x^6}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{x^2(x^4+1-x^4)}{\sqrt{x^4+1}}$

$= \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} = f(x) = f_2$

$f_1 = f_2$ وبالطابق

$g(x) = f(\sqrt{x})$ ط 3

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x})$

فيوجد $f'(x)$ بعد اصلاح x من x^4 الى x

$f'(x) = \frac{2x(x^4+1) - 2x^5}{(\sqrt{x^4+1})^3}$

وبالاجابة $f'(\sqrt{x})$

$f'(\sqrt{x}) = \frac{2\sqrt{x}((\sqrt{x})^4+1) - 2(\sqrt{x})^5}{(\sqrt{(\sqrt{x})^4+1})^3}$

وبالقوس $g(x)$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{x}((\sqrt{x})^4+1) - 2(\sqrt{x})^5}{(\sqrt{(\sqrt{x})^4+1})^3}$

السؤال السادس والعشرون

$f(x) = \tan(2x)$ ط 1

$f'(x) = 2 [1 + \tan^2(2x)]$

$f(\frac{\pi}{8}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

$f'(\frac{\pi}{8}) = 2 [1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}] = 4$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{8})}{x - \frac{\pi}{8}} = f'(\frac{\pi}{8})$ ط 2

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \frac{\tan(2x) - 1}{x - \frac{\pi}{8}} = 4$

$$x \ln 2 = 1$$

$$x = \frac{1}{\ln 2}$$

$$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2} e^{-\frac{1}{\ln 2} \ln 2 + \ln 2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} e^{-1 + \ln 2}$$

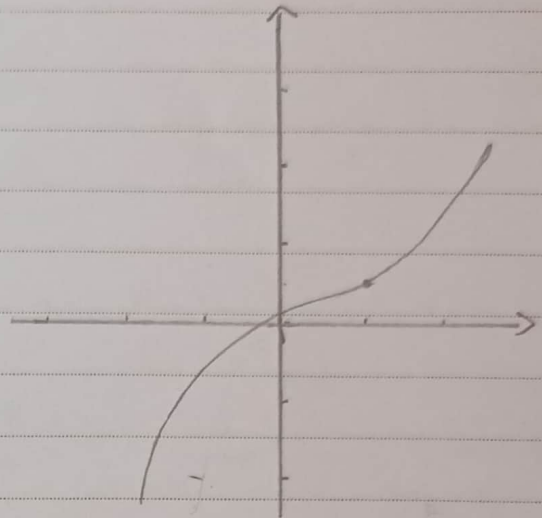
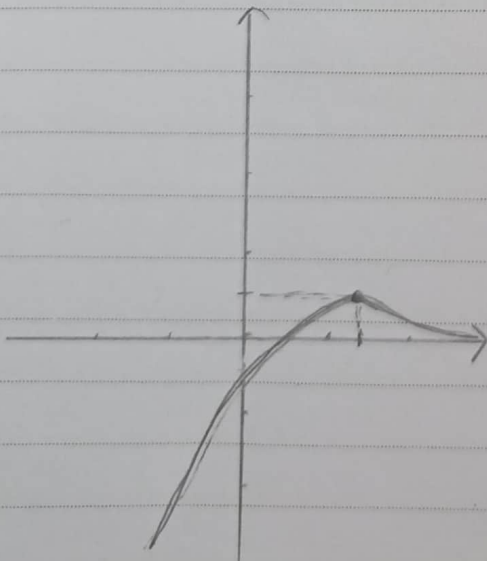
$$= \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{e} \cdot e^{\ln 2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{e} \cdot 2 = \frac{2}{e \cdot \ln 2}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{2}{e \cdot \ln 2}$$

السؤال التاسع والعشرون

x	$-\infty$	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{e \ln 2}$	0



$$f(x) = x \cdot 2^{-x+1}$$

ب

$$f'(x) = x e^{\ln 2^{-x+1}}$$

$$f'(x) = x e^{(-x+1) \ln 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \cdot 0 \quad \text{2.3.2}$$

$$f(x) = x e^{-x \ln 2 + \ln 2}$$

$$f'(x) = x e^{-(x \ln 2 - \ln 2)}$$

$$f(x) = \frac{x}{e^{x \ln 2 - \ln 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

$$f(x) = x e^{-x \ln 2 + \ln 2}$$

ب

$$f'(x) = e^{-x \ln 2 + \ln 2} (1 - x \ln 2)$$

$$f'(x) = 0$$

$$1 - x \ln 2 = 0$$

طرق f مستمرة للجدول $]0, \infty[$

f متزايدة على المجال $]0, \infty[$

$0 \in f(]0, \infty[) =]-\infty, +\infty[$

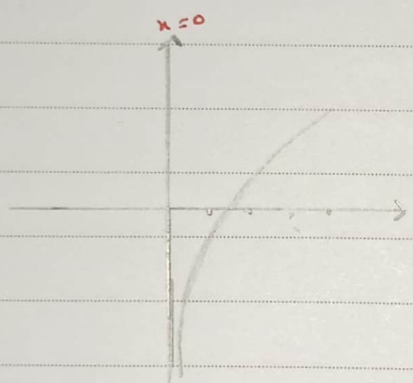
إذا للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً على المجال $]0, \infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty < 0$ لدينا

$f(1) = 1 - \ln(3) < 0$

$f(2) = 2 - \ln(5) > 0$

الحل يتعين للجدول $]1, 2[$



السؤال الثالث والثلاثون

السؤال الحادي والثلاثون

طرق $\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = 0 - \infty = -\infty$

$x=0$ مقارنة f متزايدة في 0 لـ f

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = +\infty$

طرق $f(n) - y_0 = x - \ln(2 + \frac{1}{n})$
 $= -\ln(2 + \frac{1}{n}) + \ln 2$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n) - y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\ln(2 + \frac{1}{n}) + \ln 2) = 0$

$\Delta: y = x - \ln 2$ مقارنة f متزايدة في 0 لـ f

الوضع ليس

$\ln(2) - \ln(2 + \frac{1}{n}) = 0$

$\ln(2) = \ln(2 + \frac{1}{n})$

$x = x + \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \neq 1$

مستقلة

x	0	$+\infty$
$f(n) - y_0$	-	-
الوضع ليس		Δ قس c

طرق $\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = -\infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$

$f'(n) = 1 - \frac{-\frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n^2 + n} > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(n)$	+	+
$f(n)$	$-\infty$	$+\infty$

طرق P تتعلم الجوال $]0, \infty[$

P متزايدة على $]0, \infty[$ الجوال

$0 \in P(]0, \infty[) =]-\infty, +\infty[$

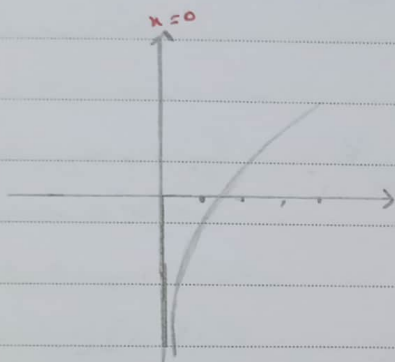
إذا للمعادل، حدًا وحيثما على الجوال $]0, \infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty < 0$ لدينا

$f(1) = 1 - \ln(3) < 0$

$f(2) = 2 - \ln(\frac{5}{2}) > 0$

الحل يتعين للجوال $]1, 2[$



السؤال الثالث والثلاثون

$y' - 2y = 1$

$y' = 2y + 1$

$y' = ay + b$

صيغة $a=2 / b=1$

$y = k e^{ax} - \frac{b}{a}$ حل العام

$y = k e^{2x} - \frac{1}{2}$; $f(x)$

$f'(x) = 2k e^{2x}$

$f'(2) = \frac{1}{2}$

$2k e^{-4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow k = \frac{1}{4 \cdot e^{-4}} = \frac{e^4}{4}$

إذن $f(x)$

$y = \frac{e^4}{4} \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}$

السؤال الحادي والثلاثون

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 - \infty = -\infty$ طرق

$x=0$ مقارب من فوق فنولد

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

$f(x) - y_0 = x - \ln(2 + \frac{1}{x}) - x + \ln 2$
 $= -\ln(2 + \frac{1}{x}) + \ln 2$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - y_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-\ln(2 + \frac{1}{x}) + \ln 2) = 0$

$\Delta y = x - \ln 2$ مقارب من الخلف

لوضع لنسب

$\ln(2) - \ln(2 + \frac{1}{x}) = 0$

$\ln(2) = \ln(2 + \frac{1}{x})$

$x = x + \frac{1}{x} \Rightarrow 0 \neq 1$

مستقيمة

x	0	$+\infty$
$f(x) - y_0$	-	-
لوضع لنسب		Δ قس c

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ طرق

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

$f'(x) = 1 - \frac{-\frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x^2 + x} > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

السؤال، اشرح، واثباته ..

طرق P مرفوعة على المجال

x	$-\infty$	-1	$+1$	∞
$P'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$P(x)$	$-\infty$	-11	$+8$	∞

$$D_P =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} P(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$x=0$ مقامه صاف

خوارزمية و تعيين مقارب

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} P(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$x=0$ مقامه صاف

خوارزمية و تعيين مقارب

P استقامت على $R \setminus \{-1\}$

$$P'(x) = \frac{(4x+1)(x+1) - (2x^2+x+7)}{(x+1)^2}$$

$$P'(x) = \frac{4x^2 + 4x + x + 1 - 2x^2 - x - 7}{(x+1)^2}$$

$$P'(x) = \frac{2x^2 + 4x - 6}{(x+1)^2}$$

بعضها ...

$$P'(x) = 0$$

$$2x^2 + 4x - 6 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -3$$

ل

$$\Rightarrow x = +1$$

ا

$$P(-3) = \frac{12}{-2} = -6 \quad / \quad P(1) = \frac{10}{2} = 5$$

1 /

$$2x - 1 \quad \text{ط (2)}$$

$$\frac{2x^2 + x + 7}{x+1}$$

$$-2x^2 + 2x$$

$$-x + 7$$

$$+x + 1$$

$$+8$$

$$P(x) = 2x - 1 + \frac{8}{x+1}$$

$$Diy = 2x - 1$$

ضع

$$P(x) - y_0 = \frac{8}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (P(x) - y_0) = 0$$

$\pm\infty$ مقامه صاف

الوضع ليس

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{8}{x+1}$	$-$	$+$	$-$
الوضع ليس	$0 < c < 8$	$0 < c < 8$	

$$I(a, b) = (-1, -3)$$

ط (3)

$$2a = -2$$

$$2b = -6$$

السطح انزول ...

$$x \in R \setminus]-3, -1[\Rightarrow 2a - x \in R \setminus]-1, 1[$$

$$x \in R \setminus]-1, 1[$$

$$-x \in R \setminus]1, -1[$$

(1x)

$$2-x \in R \setminus]-1, 1[$$

مقارن

$2a = 1$ مقارن

ب) نزل m

$$2n^2 + n - mn + 7 - m = 0$$

$$2n^2 + n + 7 = mn + m$$

$$2n^2 + n + 7 = (n+1)m$$

$$\frac{2n^2 + n + 7}{n+1} = m$$

$$\Rightarrow P(n) = m$$

من أجل m ثابت

المعادلة تكون $m \in]-\infty, -11[$

المعادلة طويجة $m = -11$

لا يوجد حلول $m \in]-11, 5[$

طويجة $m = 5$

يوجد حلول $m \in]5, \infty[$

المسؤول المماس والاشارة

المعادلة $y + 2x = 0$ في KS

$$y = -2x$$

$$\Rightarrow m = -2$$

وبالتالي نضع $f'(x) = -2$

$$\frac{(2x-4)(x+1) - (x^2-4x+1)}{(x+1)^2} = -2$$

$$(2x-4)(x+1) - (x^2-4x+1) = -2(x+1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(-1)$$

$$\Delta = 8 > 0$$

المعادلة حلان

إذا التابع يقبل ما بين موازينه المستقيم

المفروض

المستقيمات

$$P(n) + P(2a-n) = 2b$$

$$I_1 = P(n) + P(-2-n) =$$

$$= \frac{2n^2 + n + 7}{n+1} + \frac{2(-2-n)^2 + (-2-n) + 7}{(-2-n)+1}$$

$$= \frac{2n^2 + n + 7}{n+1} + \frac{8 + 8n + 2n^2 - n + 5}{-n-1}$$

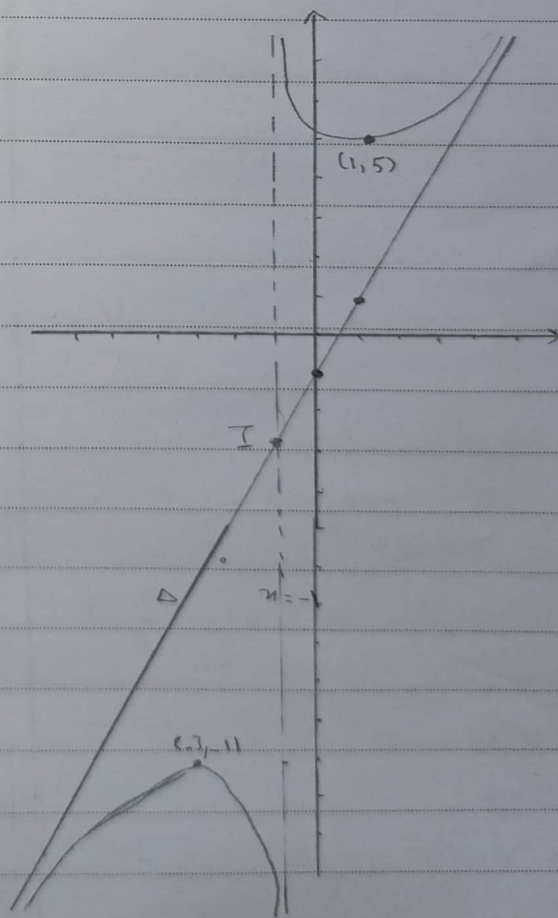
$$= \frac{2n^2 + n + 7}{n+1} + \frac{2n^2 + 7n + 13}{-n-1}$$

$$= \frac{-2n^2 - n - 7 + 2n^2 + 7n + 13}{-n-1}$$

$$= \frac{6n + 6}{-n-1} = \frac{6(n+1)}{-(n+1)} = -6 = I_2$$

إذا I حركتنا نلاحظ التابع

طويجة



السؤال الثاني والاربعون

نلاحظ من الجدول

$g(x) \leq -2 < 0 : x \in]0, \infty[$
 $\ln x - 2\sqrt{x} < 0 : x \in]0, \infty[$
 $\ln x < 2\sqrt{x}$

وهو المطلوب

$f(x) = 2\sqrt{x+1} - x$
 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1$

شرط توازن الجاهد مع القيمة (BC)
 $m_T = m_{BC}$

$f'(x) = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$

$f_1 = f'(0) = 0$
 $f_2 = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{1 - 1}{4} = \frac{0}{4} = 0$

$f_1 = f_2$
 $\Rightarrow T // (BC)$

السؤال الرابع والاربعون

$\ln x < 2\sqrt{x}$
 $\ln x - 2\sqrt{x} < 0$

نفرق المتابع الجاهد

$g(x) = \ln x - 2\sqrt{x} :]0, \infty[$

نلاحظ ان

$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{x}$

$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1$
 $\Rightarrow x = 1$; $g(1) = -2$

x	0	1	∞
g'(x)	+	0	-
g(x)	↗	-2	↘

حل المسائل المتبقية...

بيان S_n متناظرة و t_n متزايدة و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

← S_n و t_n متساوية...

طريقة لثبات $U_{n+1} = U_n$

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 8S_{n+1} + 3t_{n+1} \\ &= 8 \frac{t_n + 3S_n}{4} + 3 \frac{t_n + 2S_n}{3} \\ &= 8S_n + 3t_n = U_n \end{aligned}$$

← U_n ثابتة

طريقة لفرضيات النهاية المشتركة

للمتباينات S_n و t_n

بيان U_n ثابتة يمكن القول...

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U_{(0)} &= 8S_0 + 3t_0 \\ &= 8(12) + 3(1) = 99 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (8S_n + 3t_n) = 99$$

$$\begin{aligned} 8l + 3l &= 99 \Rightarrow 11l = 99 \\ \Rightarrow l &= 9 \end{aligned}$$

السؤال السادس...

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \ln(U_{n+1}) - 2 \quad \text{طريقة} \\ &= \ln(e \sqrt{U_n}) - 2 \\ &= \ln e + \frac{1}{2} \ln U_n - 2 \\ &= 1 + \frac{1}{2} \ln U_n - 2 = \frac{1}{2} \ln U_n - 1 \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln U_n - \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln U_n - 2 \right] \\ &= \frac{1}{2} V_n \end{aligned}$$

$$q = \frac{1}{2} \quad \leftarrow \text{لأن } V_n \text{ متناظرة}$$

$$V_0 = \ln U_0 - 2 = \ln(e^3) - 2 = 3 - 2 = 1$$

السؤال الثاني...

$$U_n = \frac{1 - 10^n}{1 + 10(10^n)}$$

$$U_n = \frac{10^n \left(\frac{1}{10} - 1 \right)}{10^n \left(\frac{1}{10} + 1 \right)} = \frac{\left(\frac{1}{10} \right)^n - 1}{\left(\frac{1}{10} \right)^n + 10}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{0 - 1}{0 + 10} = -\frac{1}{10}$$

$$-1 < q = \frac{1}{10} < 1 \quad \text{لأن}$$

السؤال الرابع...

$$V_{n+1} = S_{n+1} - t_{n+1} \quad \text{طريقة}$$

$$V_{n+1} = \frac{t_n + 3S_n}{4} - \frac{t_n + 2S_n}{3}$$

$$V_{n+1} = \frac{S_n - t_n}{12}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{12} (S_n - t_n) = \frac{1}{12} V_n$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{12} = q$$

$$q = \frac{1}{12} \quad \leftarrow \text{لأن}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 0 \quad ; \quad -1 < q = \frac{1}{12} < 1$$

طريقة # إظهار S_n

$$S_{n+1} - S_n = \frac{t_n + 3S_n}{4} - S_n$$

$$= \frac{t_n - S_n}{4} = -\frac{V_n}{4} < 0$$

متناظرة

طريقة # إظهار t_n

$$t_{n+1} - t_n = \frac{t_n + 2S_n}{3} - t_n$$

$$= \frac{2(S_n - t_n)}{3} = \frac{2}{3} V_n > 0 \quad \text{متزايدة}$$

$$0 \leq (u_n - 1)^2 \leq 1$$

$$1 \leq (u_n - 1)^2 + 1 \leq 2$$

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

نربع

دقيقه 1

$$\frac{u_n}{u_0} = q^{n-0}$$

$$\frac{u_n}{1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

طرق

لدينا صيغة لـ u_n ...

القضية صحيحة ...

$$v_n = \ln u_n - 2$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n$$

$$= u_n^2 - 3u_n + 2$$

$$= (u_n - 2)(u_n - 1)$$

$$\ln u_n = v_n + 2$$

$$u_n = e^{v_n + 2} = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$$

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

طرق

حسب لطلبك

$$\blacksquare a = u_1 = \frac{1}{2}$$

$$\blacksquare q = \frac{1}{2}$$

$$\blacksquare \text{عدد الحدود} = n$$

$$S_n = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e^{0+2} = e^2$$

طرق

$$1 < u_n$$

$$u_n \leq 2$$

$$u_n - 1 \geq 0$$

$$u_n - 2 \leq 0$$

$$(u_n - 1)(u_n - 2) \leq 0$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

متناقصة

طرق بمانات بالتالي متناقصة ومحددة من

الدرجة بالعدد (1) فهي متقاربة

$$-1 < q = \frac{1}{2} < 1$$

السؤال العاشر ...

السؤال الثامن ...

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$$

طرق

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

متزايدة

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 1 - 1 + 2$$

$$S_n = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

طرق

$$= (u_n - 1)^2 + 1$$

$$= 1 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3}{2} \left[1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(3 - \frac{3}{3^n \cdot 3^1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(3 - \frac{1}{3^n} \right)$$

$$E_n: 1 \leq u_n \leq 2$$

طرق

$$F(0): 1 \leq u_0 \leq 2$$

$$1 \leq \frac{3}{2} \leq 2$$

حقيقة

$$E_n: 1 \leq u_n \leq 2 \dots$$

الفرض

$$E_{n+1}: 1 \leq u_{n+1} \leq 2 \dots$$

الطلب

البرهان: لدينا من الفرض $1 \leq u_n \leq 2$

$$0 \leq u_n - 1 \leq 1$$

نطرح 1

$$S_n = \frac{1}{2} \left[3 - \frac{1}{3^n} \right] \leq \frac{1}{2} [3] \quad \text{ط ١٣}$$

$$S_n \leq \frac{3}{2}$$

فهو موجود من الأعلى

وبالتالي متزايدة ومحدودة من الأعلى فهو

متقارباً

$$T_{n+1} = S_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{ط ١٤}$$

$$T_{n+1} - T_n = S_{n+1} - S_n + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{2}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} < 0$$

كبير < صغير

t_n متناقصة

لذلك متزايدة الفرق

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n - S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

تكون

$$-1 < q = \frac{1}{2} < 1$$

إذاً S_n و t_n متقاربان

$$V_n = 17 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$V_n = U_n - t_n$$

$$\Rightarrow U_n = V_n + t_n$$

$$U_n = 17 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6n - 14$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 17(0) + \infty - 14 = +\infty$$

... مـتـبـدـلـة ...

ب) 3

$$t_n = an + b$$

$$t_{n+1} = a(n+1) + b$$

$$t_{n+1} = an + a + b$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + 3n - 1$$

بـيـانـت

$$an + a + b = \frac{1}{2}(an + b) + 3n - 1$$

$$an + a + b = \frac{1}{2}an + \frac{1}{2}b + 3n - 1$$

$$an + a + b = \left(\frac{a}{2} + 3\right)n + \frac{b}{2} - 1$$

$$a = \frac{a}{2} + 3$$

بـالـتـمـاـسـة

$$a + b = \frac{b}{2} - 1$$

مـنـهـنـكـ وـكـ نـفـرـلـ a

$$a - \frac{a}{2} = 3 \Rightarrow \frac{a}{2} = 3 \Rightarrow a = 6$$

بـعـوضـتـهـنـ التـمـاـسـة لـيـبـاد b

$$6 + b = \frac{b}{2} - 1 \Rightarrow b - \frac{b}{2} = -6 - 1$$

$$\frac{b}{2} = -7 \Rightarrow b = -14$$

$$\Rightarrow t_n = an + b$$

$$t_n = 6n - 14$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - t_{n+1}$$

ب) 3

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{1}{2}t_n$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n - t_n)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$$

بـاـذـا V_n مـتـبـدـلـة

$$V_0 = U_0 - t_0$$

$$= 3 - (-14)$$

$$= 3 + 14$$

$$V_0 = 17$$

$$V_n = V_0 \cdot q^n$$

$$q = \frac{1}{2}$$

نريد : $1-x=0$

$$\boxed{x=1}$$

$$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

$$E(n): 0 \leq u_n \leq 1 \quad (2)$$

$$E(0): 0 \leq u_0 \leq 1$$

$$0 \leq 1 \leq 1 \quad \checkmark$$

السؤال 19

$$f(x) = x e^{-x} ; \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\infty) e^{+\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$y=0$ مقارب أفقي عند $+\infty$
ف الاستنتاج \mathbb{R}

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - e^{-x} x \\ &= e^{-x} [1-x] \end{aligned}$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$



• نعرف قضية التناقص:

$$E(n): u_{n+1} \leq u_n$$

$$E(0): u_1 \leq u_0$$

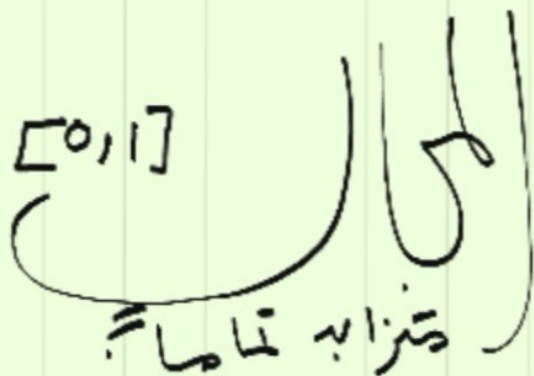
$$1 \leq 1$$

$$E(n): 0 \leq u_n \leq 1 \dots \text{فرض}$$

$$E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \dots \text{طلب}$$

البرهان

التابع f



نصور الفرض

$$f(0) \leq f\left(\frac{1}{n}\right) \leq f(1)$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq \bar{e}' \leq 1$$

بأنها متناقضة
وحدودها
من الأمام

فهي متنازحة

$$f(x) = x$$

$$x e^{-x} = a$$

$$x e^{-x} - a = 0$$

$$x(e^{-x} - 1) = 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ x=0 & e^{-x}=1 \end{matrix}$$

$$E(n): u_{n+1} \leq u_n \dots \text{فرض}$$

$$E(n+1): u_{n+2} \leq u_{n+1} \dots \text{طلب}$$

البرهان

نصور الفرض ونفرض
(متنازحة)

$$f(u_{n+1}) < f(u_n)$$

$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

متناقضة

$x e^{-x} = 0 \quad | \quad x < u_1$

ελ--ε--λ_0--1-2027.pdf

$x(e^{-x} - 1) = 0$

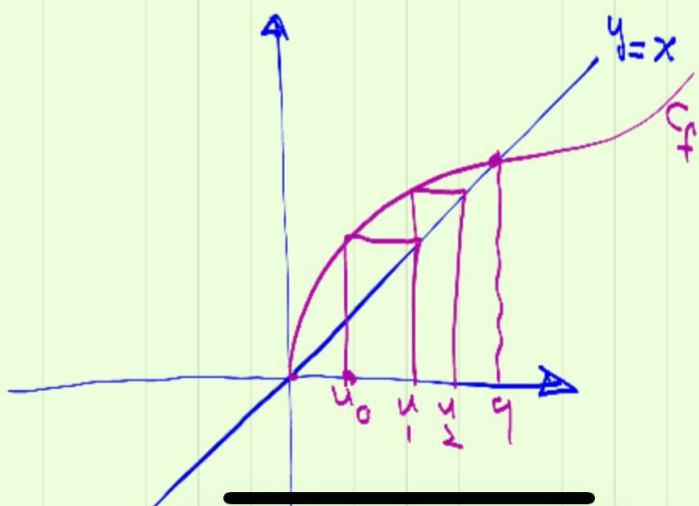
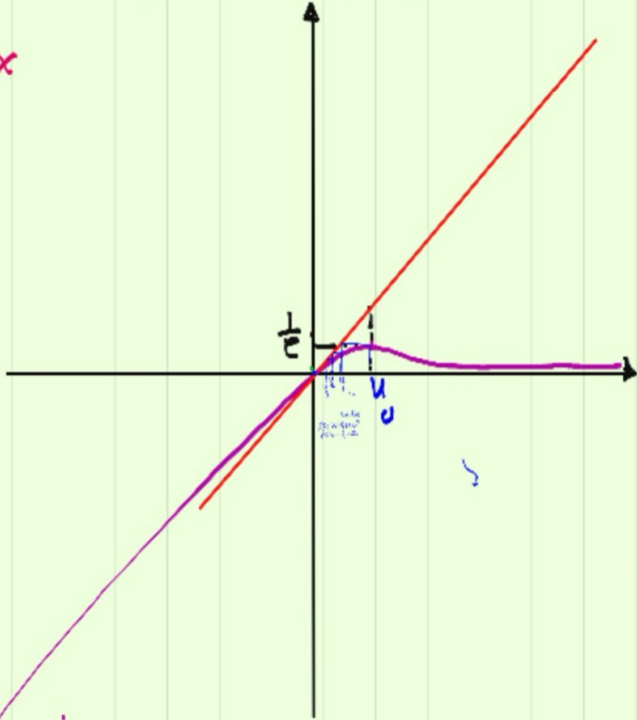
22 of 42

$p=0$

← معدلات ←

افضل: معدلات من u_0, u_1, u_2 على الفواصل

$y=x$



ننوجد في (*)

$$a + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{a = \frac{7}{16}}$$

$$\bullet V(x) = \sum x_i^2 p_i - E(x)^2$$

$$= 0 + \frac{3}{8} + \frac{2}{8} + \frac{9}{8} - \frac{49}{64}$$

$$= \frac{14}{8} - \frac{49}{64}$$

$$\stackrel{(8)}{=} \frac{112 - 49}{64} = \frac{63}{64}$$

الجبر

السؤال الأول:

$$\bullet \sum p_i = 1 \quad (1)$$

$$a + b + \frac{1}{2} = 1$$

$$\boxed{a + b = \frac{1}{2}} \dots (*)$$

$$\bullet E(x) = \frac{7}{8}$$

$$\sum x_i p_i = \frac{7}{8}$$

$$\frac{3}{8} + 2b + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$2b = \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{16}}$$

$$P(X=k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$$

$$P(X=0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{27}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{27}$$

	0	1	2	3
	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \frac{\sqrt{63}}{9}$$

السؤال 2:
برنولي

$$E(x) = np \quad V(x) = npq \quad \sigma_x = \sqrt{npq}$$

$$E(x) = 1 \rightarrow$$

$$np = 1$$

$$3p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

$$q = 1 - p = \frac{2}{3}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

السؤال ٤
 $z^2 - 4(\sin\theta)z + 4 = 0$

$a = 1 \quad b = -4\sin\theta \quad c = 4$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 16\sin^2\theta - 4(4) \\ &= 16\sin^2\theta - 16 \\ &= 16[\sin^2\theta - 1] \\ &= -16[1 - \sin^2\theta] \end{aligned}$$

$$= -16\cos^2\theta < 0$$

المعادلة تملك حلاً حقيقياً
 متراجفاً

السؤال ٣

$x \backslash y$	0	1	2	$P(x_i)$
0	$\frac{12}{100}$	$\frac{20}{100}$		$\frac{4}{10}$
1	$\frac{6}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{2}{10}$
2	$\frac{12}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{4}{10}$
$P(y_j)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

بما أن X و Y مستقلتان

$$\begin{aligned} P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j) \\ = P(X=x_i \cap Y=y_j) \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2 e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ Z_2 &= 2 e^{i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$Z_1 = \frac{4 \sin \theta + i\sqrt{16 \cos^2 \theta}}{2}$$

$$= \frac{4 \sin \theta + i \frac{4 |\cos \theta|}{2}}{2}$$

$$Z_1 = 2 \sin \theta + i 2 |\cos \theta|$$

$$Z_2 = 2 \sin \theta - i 2 |\cos \theta|$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ (2)}$$

$$Z_1 = \sqrt{3} + i$$

$$Z_2 = \sqrt{3} - i$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r = \sqrt{18} = 3 \\ x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases}$$

جميع ①, ② :

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3$$

$$x = -3$$

$$y = 2$$

$$y = -2$$

$$\omega_1 = 3 + 2i$$

$$\omega_2 = -3 - 2i$$

السؤال ⑤

$$z^2 + (1+4i)z - 5 - i = 0$$


$$a = 1 \quad b = 1+4i \quad c = -5-i$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1+4i)^2 - 4(-5-i)$$

$$= 1 + 8i - 16 + 20 + 4i$$

$$= 5 + 12i$$

عدد محدد 

★ إيجاد الجذور التربيعية

$$\Delta = 5 + 12i \text{ العدد}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{-b + \omega_2}{2a} \\ &= \frac{-(1+4i) + -3-2i}{2} \\ &= \frac{-4-6i}{2} \end{aligned}$$

$$z_2 = -2-3i$$

$$z_1 = \frac{-b + \omega_1}{2a} \quad \text{:JKI*}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-(1+4i) + 3+2i}{2} \\ &= \frac{2-2i}{2} \end{aligned}$$

$$z_1 = 1-i$$

$$P(z) = (z+1)(z^2 - 2z + 4)$$

$$P(z) = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$z+1=0 \quad z^2 - 2z + 4 = 0$$

$$\boxed{z = -1}$$

$$\Delta = 4 - 4(4) = -12 < 0$$

للمعادلة حلان عقد باين
متراصفان

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{2 + i\sqrt{12}}{2}$$

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

السؤال (8):

$$P(z) = z^3 - z^2 + 2z + 4$$

$$P(=1) = -1 - 1 - 2 + 4 = 0 \quad \textcircled{1}$$

لأن $P(z)$ لا يكاد \Leftarrow

نقسم \div

$$\frac{z^2 - 2z + 4}{z+1}$$

$$\frac{z^3 - z^2 + 2z + 4}{z+1}$$

$$\frac{z^3 + z^2}{z+1}$$

$$\frac{-2z^2 + 2z + 4}{z+1}$$

$$\frac{+2z^2 - 2z}{z+1}$$

$$\frac{4z + 4}{z+1}$$

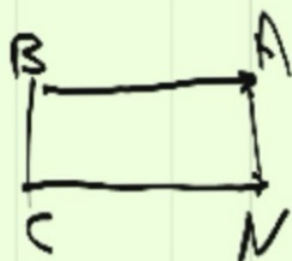
$$\frac{4z + 4}{z+1}$$

$$\frac{00}{z+1}$$

$$\Leftrightarrow a+c = b+h$$

$$a-b = h-c$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CN}$$



الرباعي $ABCN$ متوازي

(مثلا)

$$a = -1 \text{ هو } A \text{ ③}$$

$$b = 1 + i\sqrt{3} = B$$

$$c = 1 - i\sqrt{3} = C$$

احسب الأطوال:

$$AB = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}$$

$$AC = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}$$

$$BC = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{12}$$

ABC متساوي \Leftrightarrow

المثلث رأسه A .

$$a+c = b+h \text{ ④}$$

$$h = a+c-b$$

$$= -i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}$$

$$\boxed{h = -1 - 2i\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \vec{z} \cdot w &= K(\vec{z} - w) \quad (5) \\ \vec{z} &= 2\vec{z} \end{aligned}$$

$$a' = 2a = -2$$

$$b' = 2b = 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$c' = 2c = 2 - 2i\sqrt{3}$$

$$(\vec{A'B'}, \vec{A'C'}) \quad \square \cup$$

$$= \arg\left(\frac{c' - a'}{b' - a'}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{2c - 2a}{2b - 2a}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) = (\vec{AB}, \vec{AC})$$

$$R: z' - w = e^{i\theta} (z - w)$$

$$b - 0 = e^{i\frac{2\pi}{3}} (a)$$

$$b = a \cdot a$$

T انقلب
عنك

$$\begin{aligned} \vec{Z}_{OA} &= a - 0 = a \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$T: z' - z = \vec{Z}_{OA}$$

$$c - b = a$$

$$\boxed{c = b + a}$$

$$c = ad + a$$

المسألة 10: دوران R
عنك
 $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$$d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (1)$$

$$d = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (2)$$

B المركز

A الأصل

0 مركز

الزاوية $\frac{2\pi}{3}$

السؤال 11

$$z^2 + 8z + 41 = 0 \quad (P)$$

$$\Delta = 64 - 4(1)(41) \\ = -100 < 0$$

المعادلة حلان عقديان
مترافقان

$$z = \frac{8 + i10}{2}$$

$$z = 4 + 5i$$

$$z = 4 - 5i$$

$$c = a(1+d) \\ = a\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$c = a\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$\arg\left(\frac{c}{a}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$\arg\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right) = \frac{\pi}{3}$$

AC متساوي الأضلاع
متساوي الأضلاع
 $\left|\frac{c}{a}\right| = 1$ متساوي

$$z' = -iz + 4i - 7 + 4 + 7i$$

$$z' = -iz - 3 + 11i$$

شماره جوابی

$$c' = -ic - 3 + 11i$$

$$c' = -6i + 7 - 3 + 11i$$

$$c' = 4 + 5i = a$$

A صریحاً C و فنی دورا -
مرکز D زاویه $\frac{-\pi}{2}$

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{3+3i}{1+i} \quad 0/0$$

$$\rightarrow \frac{3(1+i)}{1+i}$$

$$= 3 = k \in \mathbb{R}^*$$

استقامت c, B, A
و ...

$$z' - w = e^{i\theta} (z - w) \quad (2)$$

$$z' - d = e^{-i\frac{\pi}{2}} (z - d)$$

$$z' = -iz + id + d$$

$$b' - b = \vec{DC}$$

$$b' = 2 + 3 + 4i$$

$$b' = 5 + 4i$$

المسافة
من a إلى a'

$$a - a' = 2$$

$$a' = a - 2$$

$$a' = 2 + 5i$$



إذن ADC قائم في D

$$\vec{DC} = c - d$$

④

$$|\vec{DC}| = 2$$

Q

$$\arg\left(\frac{d-b}{a-b}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \left|\frac{d-b}{a-b}\right| = 1$$

$$(BD) \perp (BA') \quad BD = \hat{A}B'$$

$$z = \frac{d-b}{a-b}$$

$$= \frac{1+3i}{-3+i}$$

$$= \frac{1+3i}{-3+i} \times \frac{-3-i}{-3-i}$$

$$= \frac{-3-i-9i+3}{9+1}$$

$$= -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$(\vec{OA}, \vec{OI}) = \frac{1}{2} \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$$

ذلك لأن

AD هو نصف الدائرة

$$[OA = OD = 1]$$

(OI) نصف الزاوية \hat{AOD}

$$Z_I = \frac{a+d}{2}$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$Z_I = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

13

$$\hat{A \circ B} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$



$$b = 1 e^{i\pi/4}$$

$$b = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a = 1$$

$$c = i$$

$$d = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{Z}_I = \underline{Z}_I$$

سواء

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \left[\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right] = \frac{2-\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} =$$

$$\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} + i \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

$$\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} =$$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} + i \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$\underline{Z}_I = \begin{matrix} \theta = \frac{3\pi}{8} \\ r = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} \end{matrix}$$

$$r = \sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2}{16} + \frac{2}{16}}$$

$$r = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{2}}{16}}$$

$$r = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$r = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\underline{Z}_I = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} e^{i \frac{3\pi}{8}}$$

ثانياً:

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \quad ①$$

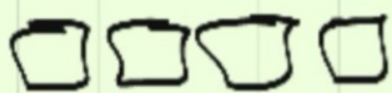
$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \quad ②$$

$$\frac{n}{2} (n-2) \quad ③$$
$$\frac{8}{2} (8-2)$$
$$4 \times 6 = 24$$

$$24 = 3 \times 8 \quad ④$$

$$\text{عدد المثلثات} = \left[\begin{array}{c} \text{عدد} \\ \text{التفرجة} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{عدد} \\ \text{الكادس} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{عدد} \\ \text{قائمة} \end{array} \right] \quad ⑤$$

$$56 = 24 + \left[\begin{array}{c} \text{عدد} \\ \text{الكادس} \end{array} \right] + 24$$



$$8 \times 7 \times 6 \times 5$$

$$= 1680$$

$$8 = 8 > 6, 5$$

$$\binom{n}{2} = \binom{4}{2} = 6 \quad \textcircled{6}$$

$$\binom{n+1}{3} = \frac{n}{2} \quad \textcircled{7}$$

$$\binom{9}{3} = 4$$

$$84 - 4 = 80$$

$$\binom{n}{2} = n \quad \textcircled{8}$$

$$\binom{8}{2} - 8 = 28 - 8 = 20$$