السؤال (1): ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق: $f(x)=\frac{1}{3+2cosx}$ والمطلوب:

1- أثبت أن f محدود

2- استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to 0} x^2 f(x)$

السؤال (2):

ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق:

$f(x)=\frac{4}{2+\sin^2 x}$ والمطلوب:

1- أثبت أن f محدود

2- استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 f(x)$

السؤال (3): ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}(lnx-1) & : x>0\\ m & : x=0\end{cases}$$

1- عين قيمة m إذا علمت أن f مستمراً عند الصفر

2- ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر وفسر النتيجة هندسياً

السؤال(4): ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\begin{cases}x\left(\frac{3}{2}-lnx\right) & : x>0\\ m-3 & : x=0\end{cases}$$

1- عين قيمة m إذا علمت أن f مستمراً عند الصفر

2- ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر وفسر النتيجة هندسياً

السؤال (5): ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق: $f(x)=\frac{|x|+2}{x^2+1}$ والمطلوب:

1- ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر

2- اكتب معادلة نصف المماس للخط c_f من اليمين

السؤال (6): ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق: $f(x)=\frac{|x|+3x+1}{x^2+1}$ والمطلوب:

1- ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر

2- اكتب معادلة نصف المماس للخط c_f من اليسار

السؤال (7): ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق :

$$f(x)=2x+E(x)$$

١- اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$

٢- ادرس استمرار f على المجال $[0,3]$

٣- ارسم الخط البياني للتابع f

٤- احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}$

السؤال(٥) : ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2[$ وفق :

$$f(x)=2E(x)-x$$

5- اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$

6- ادرس استمرار f على المجال $[0,2[$

7- ارسم الخط البياني للتابع f

8- احسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x+1}$

السؤال (9): ليكن f التابع المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\frac{2e^x-3}{e^x-1}$$

1- احسب نهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2- جد عدداً حقيقياً $\mathcal{A}$ يحقق الشرط :

"$x>\mathcal{A} \Rightarrow f(x)\in]1.99,2.01[$ "

السؤال (10): ليكن f التابع المعرف على المجال $]1,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\frac{2+lnx}{1+lnx}$$

1- احسب نهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2- جد عدداً حقيقياً $\mathcal{A}$ يحقق الشرط :

"$x>\mathcal{A} \Rightarrow f(x)\in]0.8,1.2[$ "

السؤال (11): ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,0[$ وفق :

$$f(x)=\frac{x^2+2\cos^2 x}{x}$$

1- جد معادلة المقارب المائل

2- ادرس وضع $\mathcal{C}_f$ مع مقاربه

السؤال (12): ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\frac{3x^2+x+2|sinx|}{x}$$

1- جد معادلة المقارب المائل

2- ادرس وضع $\mathcal{C}_f$ مع مقاربه

السؤال (13): ليكن $\mathcal{C}_f$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق :

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1- احسب نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$

2- أثبت أن المستقيم $y=x+1$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}_f$ عند $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي

السؤال (14): ليكن $\mathcal{C}_f$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق :

$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

1- احسب نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$

2- أثبت أن المستقيم $y=\frac{1}{2}x-1$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}_f$ عند $-\infty$

3- ادرس الوضع النسبي

السؤال (15): ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق :

$$f(x)=\sqrt{4x^2+4x+5}$$

١- احسب نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

٢- اكتب المقدار $4x^2+4x+5$ بالشكل القانوني.

٣- احسب نهاية التابع $h(x)=f(x)-\sqrt{(2x+1)^2}$ عند $\pm\infty$.

٤- استنتج معادلتي المقارب المائل للخط البياني للتابع f ثم ادرس الوضع النسبي.

٥- جد $f'(x)$ ثم استنتج مشتق التابع $g(x)=\sqrt{4\sin^2 x+4sinx+5}$

السؤال (16): ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق :

$$f(x)=\sqrt{x^2+6x+10}$$

١- احسب نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

٢- احسب نهاية التابع $h(x)=f(x)-\sqrt{(x+3)^2}$ عند $\pm\infty$.

٣- استنتج معادلتي المقارب المائل للخط البياني للتابع f ثم ادرس الوضع النسبي.

٤- جد $f'(x)$ ثم استنتج مشتق التابع $g(x)=\sqrt{\sin^2 x+6sinx+10}$

السؤال (17): ليكن f التابع المعرف على المجال $]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}+e^x$$

1- احسب نهاية $f(x)$ عند $-\infty$

2- استنتج قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty} f\big(f(x)\big)$

السؤال (18): ليكن f التابع المعرف على المجال $]e,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{2lnx+e}{lnx+1}$$

1- احسب نهاية $f(x)$ عند 1

2- استنتج قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to1} f\big(f(x)\big)$

3- بفرض $g(x)=\frac{e^x+1}{x}$ احسب

$$\lim_{x\to+\infty} f(g(x))$$

السؤال (19): احسب قيمة كلٍ من النهايات الآتية :

1	$f(x)=\frac{cosx-1}{x^2}$	$: a=0$
2	$f(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x}{3}}$	$: a=+\infty$
3	$f(x)=xln^2(x)$	$: a=0$
4	$f(x)=e^{-x}(3+lnx)$	$: a=+\infty$

السؤال (20): ليكن f التابع الاشتقاقي على $\mathcal{R}$ و الذي يحقق أن :

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\ ,f(0)=0$$

1- أثبت أن التابع g المعرف على $\mathcal{R}^*$

وفق $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

اشتقاقي على $\mathcal{R}^*$ ثم احسب $g'(x)$

2- إذا علمت أن $f(1) = \frac{\pi}{4}$ استنتج

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

السؤال (21): ليكن f التابع الاشتقاقي على

$]-1,1[$ والذي يحقق أن :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ , f(0) = 0$$

3- أثبت أن التابع g المعرف على

المجال $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ وفق

$g(x) = f(sinx) - x$ اشتقاقي

على I ثم احسب $g'(x)$

4- ....

السؤال (22): في كل من الحالات الآتية

عين عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

1	$f(x) = x^3 - 3x + 1$
2	$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

السؤال(23): ليكن f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$

1- أثبت أن $\sqrt{x^2+1}f'(x) = f(x)$

2- استنتج أن :

$$(x^4+1)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$$

3- ليكن g التابع المعرف وفق :

$$g(x) = f(sinx)$$

جد $g'(x)$

السؤال (24): ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$

وفق : $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$

1- أثبت أن

$$\frac{x}{2}(x^4+1)f'(x) = f(x)$$

2- استنتج مشتق التابع $g(x) = f(\sqrt{x})$

السؤال (25): ليكن f التابع المعرف وفق:

$$f(x) = xlnx$$

1- احسب $f'(x), f(e), f'(e)$

2- استنتج قيمة النهاية $\lim_{x\to e} \frac{xlnx-e}{x-e}$

السؤال (26): ليكن f التابع المعرف وفق:

$$f(x) = \tan(2x)$$

1- احسب $f'(x), f\left(\frac{\pi}{8}\right), f'(\frac{\pi}{8})$

2- استنتج قيمة النهاية $\lim_{x\to\frac{\pi}{8}} \frac{\tan(2x)-1}{x-\frac{\pi}{8}}$

السؤال (27): ليكن التابع f المعرف وفق

$$f(x) = (x+1)3^{-x}$$

1- جد $f'(x)$

2- احسب نهايات f عند $+\infty$ و $-\infty$

ثم نظم جدول تغيرات f

3- ارسم خطه البياني

السؤال (28): ليكن التابع f المعرف وفق

$$f(x) = 2^{x^2-2x}$$

1- جد $f'(x)$

2- احسب نهايات f عند $+\infty$ و $-\infty$

ثم نظم جدول تغيرات f

3- ارسم خطه البياني

السؤال (29): ليكن التابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق: $f(x) = x.2^{-x+1}$

1- عين نهايات التابع f عند أطراف مجموعة التعريف.

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3- ارسم الخط البياني للتابع f

السؤال (30):

ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4$$

1- أثبت أن $\Delta: y = x - 4$ مقارب مائل للخط C_f ثم ادرس الوضع النسبي لهما

2- ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها مبيناً ما للتابع من قيم حدية وما لخطه البياني من مقاربات توازي المحاور الاحداثية

3- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلين مختلفين ثم احصر كل منهما بين عددين صحيحين متتاليين

4- ارسم ما وجدته من مقاربات وارسم C_f

5- احسب مساحة السطح S المحصور بين C_f و Δ والمستقيمين $x = 3, x = 4$

السؤال (31): ليكن f التابع المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

1- احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه و اذكر ما تجده من مقاربات توازي المحاور الإحداثية

2- أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - ln2$ مقارب مائل لمنحني التابع ثم ادرس الوضع النسبي لهما

3- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

4- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً واحصره بين عددين صحيحين

5- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم C_f

السؤال (32): ليكن $E: y' + 2y = xe^{-x}$

1- عين كثير حدود $p(x)$ من الدرجة الأولى لكي يكون التابع $f(x) = \frac{p(x)}{e^x}$ حلاً له

2- جد حلول المعادلة $y' + 2y = 0$

3- أثبت أن التابع $g(x) = ke^{-2x} + \frac{P(x)}{e^x}$ حل للمعادلة E

السؤال(33) : جد حلول المعادلة التفاضلية $y' - 2y = 1$ و الذي يقبل مماساً ميله $\frac{1}{2}$ في النقطة التي فاصلتها -2 منه.

السؤال (34): ليكن التابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1- أثبت أن f فردي

2- ادرس تغيرات f

3- أثبت أن للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً مهما يكن $m \in \mathcal{R}$

4- استنتج أن f تقابل ثم جد تقابله العكسي

5- اكتب معادلة المماس للخط $\mathcal{C}_f$ عند المبدأ وادرس وضعه النسبي مع $\mathcal{C}_f$

السؤال(35): ليكن $\mathcal{C}_f$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]1,3[$ وفق :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

1- ادرس تغيرات f

2- أثبت أن $I(2,0)$ مركز تناظر

3- ارسم $\mathcal{C}_f$

4- استنتج الخط البياني للتابع :

$$g(x) = \ln(x-1) - \ln(3-x)$$

5- ناقش حسب قيم m حلول المعادلة $\ln\left(\frac{xe^m + x}{3e^m + 1}\right) = 0$

السؤال (36): ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع :

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 7}{x + 1}$$

1- ادرس تغيرات f

2- جد معادلة المقارب المائل للخط $\mathcal{C}_f$ وادرس وضعه النسبي

3- أثبت أن النقطة $I(-1,-3)$ مركز تناظر للخط $\mathcal{C}_f$

4- ارسم ما وجدته من مقاربات وارسم $\mathcal{C}_f$

5- ناقش حسب قيم m حلول المعادلة

$$2x^2 + (1-m)x + 7 - m = 0$$

السؤال (37): ليكن التابع f المعرف على $\mathcal{R}\backslash\{-1\}$ وفق : $f(x)=\frac{x^2-4x+1}{x+1}$. أيقبل الخط $\mathcal{C}_f$ مماساتٍ توازي المستقيم $y+2x=0$

السؤال (38): ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق :

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$$

1- ادرس تغيرات f و ارسمه

2- جد معادلة كل مماس للخط c_f مار من المبدأ (وليس مماس في المبدأ)

السؤال (39): ليكن f التابع المعرف وفق : $f(x)=\sin(3x)$

١- احسب $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)$ بدلالة التابع sin

٢- أثبت أن

$$f^{(n)}(x)=3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

السؤال (40): ليكن f التابع المعرف وفق :

$$f(x)=\ln(1-x)$$

أثبت أن $f^{(n)}(x)=\frac{-(n-1)!}{(1-x)^n}$

السؤال(٤١): ليكن $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق :

$$f(x)=\ln(e^{-x}+1)$$

١- جد نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$. هل يقبل $\mathcal{C}$ مقاربات غير مائلة ؟

٢- أثبت أن $f(x)=-x+\ln(e^x+1)$

٣- استنتج أن الخط $\mathcal{C}$ يقبل مقارباً مائلاً عند $-\infty$ وليكن d

٤- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها ثم ارسم ما له من مقاربات و ارسم $\mathcal{C}$

5- نرمز إلى نقاط $\mathcal{C}$ التي فواصلها 0 و 1 و -1 على الترتيب بالرموز $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ و $\mathcal{D}$

أثبت أن مماس $\mathcal{C}$في $\mathcal{A}$ يوازي المستقيم $(\mathcal{BD})$

السؤال (42):

ليكن $\mathcal{C}_f$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[-1,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=2\sqrt{x+1}-x$$

بفرض A, B, C ثلاث نقاط من $\mathcal{C}_f$ فواصلها على الترتيب هي:

0 و -1 و 3 والمطلوب: أثبت أن المماس للخط $\mathcal{C}_f$ في النقطة A يوازي المستقيم (BC)

السؤال(٤٣) :

أثبت أنه من أجل كل $x > -1$ يتحقق أن :

$$\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$$

السؤال (44):

أثبت أنه من أجل كل $x > 0$ يتحقق أن :

$$\ln x < 2\sqrt{x}$$

السؤال (٤٥):

ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

١- أثبت أن $f(x) + f(-x) = 2$

٢- استنتج أن $I(0,1)$ مركز تناظر للخط $\mathcal{C}_f$

٣- ادرس تغيرات f واذكر ماله من مقاربات

٤- اكتب معادلة المماس في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب ثم ادرس الوضع النسبي.

٥- ارسم $\mathcal{C}_f$ و ناقش تبعاً لقيم الوسيط m حلول المعادلة

$$(3-m)e^x - 1 - m = 0$$

٦- أثبت أن $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ ثم احسب مساحة السطح المحصور بين منحني التابع ومحور الفواصل و المستقيمين $x = 0, x = \ln 2$

السؤال (٤٦) : ليكن f التابع المعرف على المجال $]0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

١- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

٢- أثبت وجود عددين حقيقين a, b يحققان أن $\frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$

٣- استنتج جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 3}$ وفق $u_n = f(n)$

٤- أثبت أن التابع g المعرف على المجال $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ وفق $g(x) = f(\cos x)$ اشتقاقي على I ثم أوجد $g'(x)$

٥- قارن بين e^{π}, π^e

٦- استنتج الخط البياني للتابع h المعرف وفق $h(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

السؤال(٤٦) :

أولاً : ليكن g التابع المعرف على المجال $]0, +\infty[$ وفق $g(x) = x^2 + \ln x - 1$:

١- ادرس تغيرات g ونظم جدولاً بها

٢- أثبت أن $\alpha = 1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

ثانياً : ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0, +\infty[$ بالشكل

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$$

١- احسب نهايات f عند أطراف المجال وفسر النتيجة هندسياً

٢- أثبت أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج جدول تغيرات f

٣- عين القيمة الحدية للتابع f و استنتج معادلة المماس الأفقي لـ $\mathcal{C}$

٤- أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x+1$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$ ثم ادرس الوضع النسبي

٥- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم $\mathcal{C}$

السؤال(٤٨) :ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=e^{-x}\left(1+ln(x)\right)$$

والتابع g المعرف على I وفق:

$$g(x)=\frac{1}{x}-1-ln\,x$$

المطلوب:

1- ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.

2- بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلاً وحيداً α, ثم تحقق أن $\alpha=1$.

3- جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

4- أثبت أن: $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$

5- مستفيداً من تغيرات التابع g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

6- في معلم متجانس ارسم الخط C_f.

السؤال (٤٩) : ليكن $\mathcal{C}_f$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]-2,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=(x+1)\ln(x+2)$$

وليكن g التابع المعرف على I وفق:

$$g(x)=\frac{x+1}{x+2}+\ln(x+2)$$

١- جد نهاية التابع f عند أطراف المجال I.

٢- أثبت أن $f'(x)=g(x)$ واكتب معادلة المماس Δ للخط $\mathcal{C}_f$ في نقطة منه فاصلتها $x=-1$.

٣- ادرس اطراد التابع $g(x)$ واستنتج اشارته (مستفيداً من نقطة التماس)

٤- نظم جدولاً بتغيرات التابع f وارسم خطه البياني ومقاربه الشاقولي.

٥- استنتج اطراد المتتالية $u_n=\ln(n+2)^{n+1}$ أيا كان العدد الطبيعي n.

السؤال(٥٠):

ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$$

والمطلوب:

1- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي.

2- أثبت ان $f'(x) = (1-x^2)e^{-x}$

3- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الجدية مبيناً نوعها.

4- ارسم $\mathcal{C}$ في معلم متجانس.

5- استنتج رسم الخط البياني $\mathcal{C}_1$ للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = (x-1)^2e^x$$

6- جد مجموعة تعريف التابع:

$$h(x) = ln\big(f(x)\big)$$

السؤال (51): ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق:

$$f(x) = e^{-2x} + 2x - 2$$

المطلوب:

1- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- بيّن أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x - 2$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$ عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ وΔ.

3- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها, ثم بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ حذرين في $\mathcal{R}$ أحدهما ينتمي للمجال $[-1, 0]$.

4- ارسم Δ و $\mathcal{C}$, ثم احسب مساحة السطح المحصور بين محور التراتيب و $\mathcal{C}$ و Δ والمستقيم $x = 1$.

5- استنتج الخط البياني $\mathcal{C}'$ للتابع g المعرف وفق:

$$g: x \mapsto -e^{-2x} + 2x + 2$$

السؤال(52) :

ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

1- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

3- ارسم $\mathcal{C}$.

4- استنتج الخط البياني للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2x}\right)$$

5- استنتج الخط البياني للتابع h المعرف وفق:

$$h(x) = \ln(2) + \ln(x) - \ln(x-1)$$

السؤال (53) : ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-\infty, 1[$ وفق:

$$f(x) = e^x + \ln(1-x)$$

وليكن g التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق:

$$g(x) = (1-x)e^x - 1$$

المطلوب:

1- ادرس اطراد التابع g واستنتج أن $g(x) \leq 0$ مهما تكن $x \in \mathcal{R}$.

2- تحقق أن $f'(x) = \frac{g(x)}{1-x}$ على المجال $]-\infty, 1[$, ثم ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3- اكتب معادلة المستقيم المماس $\mathcal{T}$ للخط $\mathcal{C}$ في نقطة منه فاصلتها $x = 0$.

4- في معلم متجانس ارسم المستقيم $\mathcal{T}$, ثم ارسم $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f.

السؤال(54): ليكن f, g التابعان المعرفان على المجال $I =]-1, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad , \quad g(x) = \frac{x}{x+1}$$

1- ادرس اطراد التابع $h(x) = f(x) - g(x)$ على I ثم استنتج إشارة h

2- استنتج الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}_f$ مع $\mathcal{C}_g$ (أي هل $\mathcal{C}_f$ فوق $\mathcal{C}_g$ أو العكس)

3- أثبت أن $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ يقبلان مماساً مشتركاً عند النقطة $a = 0$

4- احسب مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ والمستقيمين $x = 0, x = 1$

السؤال(55): ليكن n عدداً طبيعياً موجباً تماماً و لنضع من أجل كل n :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

1- أثبت أن $f_n(x)$ اشتقاقي عند الصفر ثم احسب $f_n'(x)$ في حالة $x > 0$

2- ادرس تغيرات التابع f_n بدلالة n

3- من أجل $n = 1, n = 2$

أثبت أن $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ الخطان البيانيان للتابعين f_1, f_2 يمران من المبدأ ومن النقطة $\mathcal{A}(1,0)$

4- أثبت أن $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ يقبلان مماساً مشتركاً $\mathcal{T}$ عند $\mathcal{A}$ واكتب معادلته

5- ارسم $\mathcal{T}$ و $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$

السؤال (56) :

ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق :

$$f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x} - 1\right)$$

١- اثبت أن f زوجي و استنتج الصفة التناظرية

٢- أثبت أن

$$f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x} - e^{-x})$$

واستنتج معادلة المقارب المائل للخط $\mathcal{C}_f$

٣- استنتج أن المستقيم $d' : y = -x$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}_f$

٤- ارسم d, d' ثم ارسم $\mathcal{C}_f$

٥- بفرض g مقصور التابع f على المجال $]0, +\infty[$ أثبت أن g حل للمعادلة التفاضلية:

$$y + \ln(y') = \ln(e^x - e^{-x})$$

٦- استنتج الخط البياني للتابع :

$$h(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^{2x} + 1 - e^x}\right)$$

السؤال (٥٦): ليكن التابع g المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = x - 1 + \ln(x)$$

وليكن $\mathcal{C}_f$ الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln(x)$$

١- بين $g(1) = 0$ ثم ادرس تغيرات g ونظم جدولاً بها واستنتج إشارة $g(x)$.

٢- جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

٣- بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ونظم جدول تغيرات f وبين أن $f(x) \geq 0$ أيا كانت $x \in I$.

٤- أثبت أن التابع F المعرف على المجال I وفق:

$$F(x) = xln(x) - x - \frac{1}{2}\ln^2 x$$

هو تابع أصلي للتابع f.

٥- احسب مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$.

شغف الرياضيات

المتتاليات

السؤال (1): من أجل $a > b > 0$ نضع $u_n = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ والمطلوب :

1- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2- بفرض $v_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$. أثبت أن $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$ ثم استنتج نهاية v_n

السؤال(2): احسب نهاية المتتالية المعرفة بالحد العام $u_n = \frac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$

السؤال(3) : ليكن لدينا المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المتتاليتين المعرفتين وفق :

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \quad , \quad x_0 = 3$$

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad , y_0 = 1$$

و بفرض أن $x_n > y_n > 0$.

1- ادرس اطراد كلٍ من $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$

2- إذا علمت أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$ أثبت أن $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان

3- أثبت أن $u_n = x_n y_n$ ثابتة ثم استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين $(x_n), (y_n)$

السؤال(4): نتأمل المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$, المعرفتين تدريجياً بالشكل:

$$s_{n+1} = \frac{t_n + 3s_n}{4} \, , s_0 = 12$$

$$t_{n+1} = \frac{t_n + 2s_n}{3} \, , t_0 = 1$$

1- أثبت أن المتتالية $v_n = s_n - t_n$ هندسية، واحسب نهايتها.

2- أثبت ان المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$

3- متجاورتان.

4- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = 3t_n + 8s_n$ ثابتة.

5- جد النهاية المشتركة للمتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$؟

السؤال(5) : بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة بالشكل

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \quad \text{و} \quad u_0 = 2$$

و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $v_n = u_n + 6$

1- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية و عين أساسها و حدها العام ثم احسب نهايتها

2- احسب قيمة المجموع

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

3- استنتج u_n بدلالة n ثم عين نهايتها

4- بفرض $w_n = \ln(v_n)$ أثبت أن (w_n) حسابية ثم احسب المجموع

$$w_0 + w_1 + \cdots + w_5$$

السؤال(6): لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ و

$u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ و $u_0 = e^3$ و v_n متتالية معرفة وفق $v_n = \ln(u_n) - 2$ والمطلوب:

1- أثبت أن v_n هندسية وعين أساسها وحدها الأول

2- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3- احسب المجموع

$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

4- احسب نهاية u_n

السؤال (7):

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$$u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6 \ , u_0 = \frac{5}{2}$$

1- أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن

$2 \leq u_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n.

2- أثبت أن

$u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2)$.

3- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

4- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

واحسب نهايتها

السؤال (8):

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$$u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 2 \ , u_0 = \frac{3}{2}$$

5- أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن

$1 \leq u_n \leq 2$ أياً كان العدد الطبيعي n.

6- أثبت أن

$u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$.

7- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

8- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

السؤال (9): لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و

$(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفتان وفق:

$$v_n = u_n + \frac{1}{2^n} \qquad u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$$

1- ادرس اطراد كلٍ من u_n و v_n

2- بسط عبارة u_n

3- استنتج أن u_n و v_n متجاورتين

السؤال (10): لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$

المعرفة وفق:

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

1- أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

2- أثبت أن S_n تكتب بالشكل:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$

3- ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ وبين أنها متقاربة.

4- لنضع $T_n = S_n + \frac{1}{2^n}$ هل T_n, S_n متجاورتين.

السؤال(11) : لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ المتتالية المعرفة وفق :

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

1- أثبت بالتدريج أن $n \leq 2^n$ مهما يكن $n \geq 1$

2- هل العدد 4 عنصر راجح على $(u_n)_{n\geq 1}$

3- هل المتتالية متقاربة .

السؤال(12) :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

١- أثبت أن $n \leq 2^{n-1}$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$.

٢- استنتج عنصر راجح على المتتالية .

٣- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

السؤال (13) :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

١- ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

٢- اثبت أن العدد 2 راجح على $(u_n)_{n\geq 0}$.

٣- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ثم جد عدداً حقيقياً n_0 يحقق أياً كان $n > n_0$ كان u_n في المجال $]1.9,2.1[$

السؤال(14) :

نضع $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} : n \geq 1$

١- أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

٢- أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

السؤال (15) :

من أجل $n \geq 1$ نضع $u_n = \frac{1}{n^2+n}$:

١- جد عددين حقيقين a, b يحققان

أن $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$

٢- بسط المجموع

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ ثم

احسب نهايته

3- أثبت أن u_n محدودة

السؤال (16): لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

المعرفة وفق :

$$u_0 = 2$$
$$u_{n+1} = 2u_n - 3n + 4$$

ولتكن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية تآلفية

تحقق أن $t_{n+1} = 2t_n - 3n + 4$

١- جد t_n بدلالة n

٢- أثبت أن المتتالية $v_n = u_n - t_n$

هندسية ثم اكتب v_n بدلالة n

٣- استنتج u_n بدلالة n و أثبت أنها متباعدة

السؤال (18) : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$u_0 = 3$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3n - 1$$

و لتكن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية تآلفية تحقق أن $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + 3n - 1$

١- جد t_n بدلالة n

٢- أثبت أن المتتالية $v_n = u_n - t_n$ هندسية ثم اكتب v_n بدلالة n

٣- استنتج u_n بدلالة n واحسب نهايتها

السؤال (19) : بفرض f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق:

$$f(x) = xe^{-x}$$

١- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً به

٢- نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ و $u_0 = 1$

أ- أثبت أنه مهما يكن n فإن

$$0 \leq u_n \leq 1$$

ب- أثبت أن المتتالية u_n متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة

ت- جد نهاية u_n

٣- مثل الحدود الثلاثة الأولى على محور الفواصل.

السؤال(20): لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \quad , u_0 = 2$$

وليكن f التابع المعرف على المجال $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$:

١- ادرس تغيرات f ونظم جدول تغيرات بها

٢- أثبت أنّ: $\Delta: y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ و ادرس الوضع النسبي

٣- جد فواصل نقاط تقاطع منحني التابع مع المستقيم $d: y = x$

٤- ارسم d, Δ ثم ارسم $\mathcal{C}_f$

٥- مثل الحدود الأولى للمتتالية على محور الفواصل .

الجبر

السؤال(1) : لديك جانباً جدول قانون احتمالي لمتحول عشوائي X:

x_i	0	1	2	3
p_i	a	$\frac{3}{8}$	b	$\frac{1}{8}$

1- جد قيمة a, b إذا علمت أن

$$E(x) = \frac{7}{8}$$

2- احسب التباين و الانحراف المعياري

السؤال(2): ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات بتجربة برنولية توقعه الرياضي $E(x) = 1$ والمطلوب:

أكمل الجدول المجاور.

x	0	1	2	3
$p(X = x)$				

السؤال(3): أكمل الجدول الآتي إذا علمت أن X و Y مستقلان احتمالياً:

X \ Y	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون Y	0.3			

السؤال(4) : لتكن لدينا المعادلة

$$z^2 - 4(sin\theta)z + 4 = 0$$:

1- حل في C المعادلة السابقة

2- بفرض $\theta = \frac{\pi}{3}$ و z_1, z_2 حلول المعادلة السابقة . اكتب z_1, z_2 بالشكل الأسي

السؤال(5) : لتكن المعادلة :

$$z^2 - 2(cos\theta)z + 1 = 0$$

جد جذور المعادلة السابقة .

السؤال(6) : جد حلول المعادلة :

$$z^2 + (1 + 4i)z - 5 - i = 0$$

السؤال(7) :

جد الجذرين التربيعين للعدد $w = -8 - 6i$ ثم حل المعادلة

$$z^2 + 2z + 3 + \frac{3}{2}i = 0$$

السؤال(8): $P(z) = z^3 - z^2 + 2z + 4$

1- أثبت أن $P(-1) = 0$ ثم عين كثير حدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ يحقق أن $P(z) = (z + 1)Q(z)$

2- استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$

3- بفرض A, B, C النقاط التي تمثلها حلول المعادلة السابقة . بين طبيعة المثلث ABC

4- جد العدد العقدي n الذي يحقق $a + c = b + n$ و ما هي طبيعة الرباعي $ABCN$

5- بفرض $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تحاكٍ مركزه المبدأ ونسبته 2

أ- جد الأعداد العقدية a', b', c'

ب- أثبت أن $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$

السؤال(9):

ليكن $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

1- أثبت وجود كثير حدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ يحقق أن $P(z) = (z+1)Q(z)$

2- استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$

3- بفرض A, B, C نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة . أثبت أن ABC مثلث متساوي الأضلاع

السؤال(10):

المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس , نعتبر R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$

1- اكتب بالشكل المثلثي $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2- لتكن النقطة A التي يمثلها العدد $a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ و B صورة A بالدوران R , ليكن b العدد الممثل للنقطة B أثبت أن $b = d.a$

3- ليكن T الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OA}$ و النقطة C صورة النقطة B وفق T و c العدد العقدي الممثل للنقطة C

أ- تحقق أن $c = b + a$ ثم استنتج أن $c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ب- حدد $arg\left(\frac{c}{a}\right)$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAC

السؤال (11):

أ) حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة $z^2 - 8z + 41 = 0$

ب) نعتبر في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس النقاط A, B, C, D التي تمثلها الأعداد العقدية

$a = 4 + 5i$, $b = 3 + 4i$, $c = 6 + 7i$, $d = 4 + 7i$

1- احسب $\frac{c-b}{a-b}$ و استنتج أن النقاط A, B, C على استقامة واحدة

2- بفرض $M'(z')$ صورة النقطة $M(z)$ وفق الدوران الذي مركزه D و زاويته $-\frac{\pi}{2}$, أثبت أن :

$z' = -iz - 3 + 11i$

3- عين صورة C وفق الدوران السابق و ما طبيعة المثلث ACD

4- ليكن T الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DC}$ و لتكن B' صورة B وفق T و A صورة A' وفق T والمطلوب :

a- اكتب الصيغة العقدية للانسحاب ثم استنتج a', b'

b- اكتب الشكل الجبري و الأسي للعدد $Z = \frac{d-b}{a'-b'}$

c- استنتج أن المستقيمين $(A'B')$ و (DB) متعامدين وأن $DB = A'B'$

5- ليكن e العدد العقدي الممثل للنقطة E منتصف $[AD]$ أثبت أن النقاط A', B', B, C تقع على دائرة واحدة مركزها E

السؤال(12):

في المستوي العقدية المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B التي يمثلها العددين $a = 3 + 3i$ و $b = 3 - 3i$:

1- بين أن a و b هما حلّا المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$ بطريقتين.

2- اكتب a بالشكل المثلثي ثم استنتج b بالشكل المثلثي ثم استنتج أن $a^4 + b^4 + 648 = 0$.

3- استنتج الشكل المثلثي للأعداد الآتية: $-a$, $a.b$, $\frac{a^3}{b^5}$

4- احسب $\frac{a}{b}$ ثم استنتج أن المثلث AOB قائم ومتساوي الساقين.

5- اعط الصيغة العقدية للانسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{OA}$.

6- بفرض $T(B) = B'$. تحقق أن $b' = 6$.

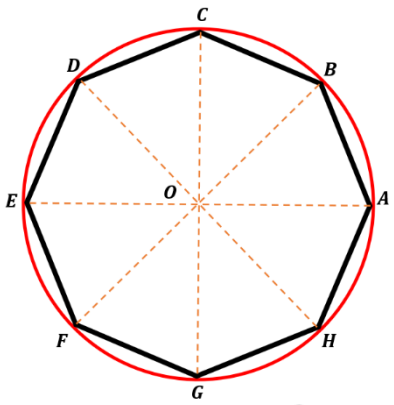
7- مثل A, B, B' في المستوي.

8- بين أن $\frac{b-b'}{a-b'} = -i$ واستنتج طبيعة المثلث $BB'A$.

السؤال(13):

أولاً:

نتأمل في معلم متجانس $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ في المستوي الشكل المرسوم جانباً.



لدينا ثمان نقاط A, B, C, D, E, F, G, H موزعة على دائرة نصف قطرها ١ . و التي تمثل رؤوس مثمن منتظم

1- أثبت أن الشكل الجبري للعدد b هو $b = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

2- اكتب الأعداد a, c, d بالشكل الجبري

3- ليكن I منتصف $[AD]$ استنتج قياساً للزاوية $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI})$

٤- احسب العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I بصيغتيه الجبرية و الأسية واستنتج $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

ثانياً:

١- ما عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن

٢- ما عدد الرباعيات التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن

٣- ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن

٤- ما عدد المثلثات المنفرجة التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن

٥- ما عدد المثلثات الحادة التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن

٦- ما عدد المستطيلات التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن

٧- ما عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من النقاط $\{A, B, C, D, E, F, G, H, O\}$

٨- نسمي قطراً في المثمن : كل قطعة مستقيمة واصلة بين رأسين غير متتاليين , ما عدد أقطار المثمن

٩- ما عدد نقاط تقاطع أقطار المثمن

١٠- ما عدد الكلمات المؤلفة من ٤ أحرف مختلفة من حروف رؤوس المثمن

السؤال(١٤): ليكن $a = 2\,, b = 2e^{\frac{i\pi}{4}}$ عددان يمثلان النقطتين A, B و المطلوب و لنفرض النقطة I منتصف $[AB]$ و المطلوب :

١- ارسم معطيات هذه المسألة

٢- بين طبيعة المثلث OAB ثم احسب $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI})$

٣- اكتب Z_I بالشكل الأسي و الجبري ثم استنتج $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

السؤال (15) : دائرة مركزها O نرسم فيها 6 أقطار فتحدد على محيطها اثنا عشر رأساً $\{A_1, A_2, \dots, A_{12}\}$ والمطلوب:

1- ما عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من النقاط : $\{A_1, A_2, \dots, A_{12}\}$

2- ما عدد الرباعيات التي يمكن تشكيلها من النقاط $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}\}$

3- ما عدد المستطيلات التي يمكن تشكيلها من تلك النقاط

4- ما عدد الرباعيات التي يمكن تشكيلها من تلك النقاط

5- ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن تشكيلها من تلك النقاط

6- ما عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من النقاط :

$\{O, A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}\}$

7- ما عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من النقاط

$\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}\}$

بشرط أن يكون أحد رؤوسها A_1

السؤال (16) : نحو دراسة حلول المعادلة

$z^3 = 8i \dots (*)$

1- جد حلول المعادلة $(*)$ بالشكلين الأسي و الجبري ثم احسب مجموع هذه الحلول

2- أثبت أن النقاط M_0, M_1, M_2 النقاط الممثلة لحلول المعادلة $(*)$ تقع على دائرة واحدة مركزها O

3- بين طبيعة المثلث $M_0M_1M_2$

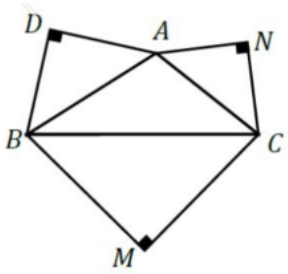
السؤال (17): ليكن $w = -1$:

1- جد الجذور التكعيبية للعدد w

2- بفرض a, b, c الجذور التكعيبية السابقة و التي تمثلها النقاط

السؤال(18):

نتأمل في المستوي العقدي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً.



ننشئ خارجه النقاط D و M و N التي تجعل المثلثات DBA و MCB و NAC قائمة في D و M و N بالترتيب ومتساوية الساقين كما في الشكل المجاور.

بفرض a و b و c و d و m و n و الأعداد العقدية الممثلة بالترتيب للنقاط:

A و B و C و D و M و N . والمطلوب:

1- إذا كانت $F'(z')$ هي صورة $F(z)$ وفق دوران ربع دورة مباشرة حول $\Omega(w)$, فأثبت أن:

$$w = \frac{1}{2}[(1-i)z + (1+i)z']$$

2- اكتب d بدلالة a و b , واكتب m بدلالة b و c واكتب n بدلالة c و a.

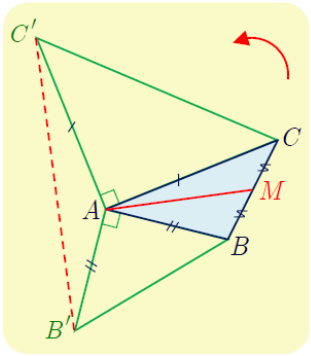
3- استنتج أن للمثلثين DMN و ABC مركز الثقل ذاته.

4- نختار معلماً مباشراً متجانساً مبدؤه النقطة A. أثبت أن المستقيمين

(AM) و (DN) متعامدان , ثم استنتج أن $AM = DN$.

السؤال (19):

بفرض a, b, c الأعداد العقدية الممثلة للنقاط A, B, C في مستوٍ عقدي $(A, \vec{u}, \vec{v})$



والمثلثين ABB' و ACC' مثلثين قائمين ومتساويا الساقين و M منتصف $[BC]$

1- اكتب الأعداد العقدية b', c' و m بدلالة b, c

2- احسب $\frac{m}{b'-c'}$ بالشكل الأسي واستنتج $arg\left(\frac{m}{c'-b'}\right)$

3- أثبت أن (AM) ارتفاع في المثلث $AB'C'$ وأن $AM = \frac{1}{2}B'C'$

السؤال(20): يحتوي صندوق U_1 على كرتين حمراوين و ثلاث كرات زرقاء و صندوق آخر U_2 يحوي n كرة حمراء و كرتين زرقاوين **نختار بشكل عشوائي أحد الصندوقين ثم نسحب منه كرة واحدة و** ليكن R الحدث الدال الحصول على كرة حمراء و B الحدث الدال على الحصول على كرة زرقاء

1- إذا علمت أن $P(U_1|R) = \frac{2}{5}$ احسب عدد الكرات الحمراء بالصندوق

2- نسحب من الصندوق U_2 ثلاث كرات على التتالي دون إعادة و ليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الكرات الحمراء المسحوبة . اكتب قيم X و نظّم جدول قانونه الاحتمالي

3- احسب التوقع الرياضي

السؤال(21): نتأمل التجربة الآتية:

صندوق يحوي ثلاث كرات : واحدة حمراء تحمل الرقم 1 اثنتان زرقاوان تحملان ارقم 2 و 3 نسحب

من الصندوق عشوائياً كرتين على التتالي مع إعادة ولتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة :

- نعرف على Ω المتحول العشوائي X الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد الكرات الزرقاوات المسحوبة
- ونعرف على Ω المتحول العشوائي Y الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموعة رقمي الكرتين المسحوبين

1- اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي

2- اكتب قيم Y و قانونه الاحتمالي

3- اكتب قانون الاحتمال للزوج (X,Y)

4- هل X,Y مستقلان عشوائياً

السؤال(22):

لتكن المجموعة $S=\{0,1,2,\dots,15\}$:

1- ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر S؟

2- ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر S مجموعها ليس من مضاعفات 3؟

السؤال (23) :

نريد تشكيل لجنة مؤلفة من 3 أشخاص من مجموعة تحوي 6 أشخاص

1- بكم طريقة يمكن تشكيل اللجنة

2- بكم طريقة يمكن تشكيل اللجنة إذا علمت أن في المجموعة شخصان متخاصمان لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

السؤال (24) :

يُطلب من طالب دراسات عليا أن يدرس 6 كتب من أصل 8 :

1- بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الكتب الستة

2- بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الكتب الستة إذا علمت انه يوجد كتابين للغة الإنكليزية و العربية إجباريين

السؤال(24):

نريد توزيع 6 هدايا على 5 تلاميذ بحيث يحصل كل تلميذ على هدية واحدة على الأقل . ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية

السؤال (25) :

يواجه حارس مرمى عدداً من ضربات الجزاء، إذا صد ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.8 , وإذا لم يصد ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ هو 0.6.

نفترض أن احتمال أن يصد أول ضربة جزاء يساوي 0.7, ليكن A_n الحدث << يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n>>

1- احسب احتمال $P(A_2|A_1)$ و $P(A_2|A_1')$.

2- استنتج أن $P(A_2)=0.72$.

3- نعرف المتتالية $p_n=P(A_n)$:

1- برهن أن $p_{n+1} = (0.2)p_n + 0.6$.

2- لنعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ بالصيغة $u_n = p_n - 0.75$ بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها 0.2.

3- استنتج عبارة p_n بدلالة n ثم احسب نهاية p_n.

السؤال (26) : نتأمل صندوقين يحتوي الصندوق الأول على 3 كرات مرقمة بالأعداد 1,2,3 و يحوي الصندوق الثاني 4 كرات مرقمة بالأعداد 2,3,4,5 . نسحب عشوائياً كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني و المطلوب :

1- اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار (يمكن تمثيله في جدول)

2- ليكن A الحدث : إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل الرقم 3

و ليكن B الحدث : مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من 5 , هل الحدثان A, B مستقلان ؟

السؤال (27) :

يحوي صندوق على 8 كرات . ثلاث منها حمراء مرقمة بالأرقام 0,1,1 و ثلاث خضراء مرقمة بالأرقام 0,1,2 وكرتين بيضاوين مرقمين بالأرقام 0,1 نسحب من الصندوق 3 كرات معاً .

وليكن A الحدث : سحب كرة من كل لون و B : الكرات المسحوبة تحمل الرقم ذاته و المطلوب:

1- احسب احتمالات الأحداث A و B و $A \cap B$

2- احسب احتمال أن تكون الكرات تحمل الرقم ذاته علماً ان كل كرة من لون

3- بفرض X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات التي تحمل الرقم 1 : اكتب جدول القانون الاحتمالي لـ X

السؤال (28) : جد الحد المستقل عن x في منشور $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{12}$

السؤال(29): عين قيم n التي تحقق المساواة في الحالات التالية :

$$\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$$

$$12\binom{n+2}{4} = 7p_n^3$$

السؤال (30):

أولاً: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$$

ثانياً: نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقاط A,B,C,D التي تمثلها الأعداد العقدية a,b,c,d حيث:

$$a=\sqrt{3}+i\ ,b=\bar{a}\ ,c=-2i\ ,d=\bar{c}$$

١- وضع النقاط في شكل.

٢- أثبت أن $d-c=2(a-b)$ وما طبيعة الرباعي $ABCD$.

٣- بين أن النقاط A,B,C,D تقع على دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

٤- ليكن e العدد العقدي الممثل للنقطة E نظيرة النقطة B بالنسبة للمبدأ. جد e.

٥- أثبت أن $a-c=e^{-i\frac{\pi}{3}}(e-c)$ واستنتج طبيعة المثلث AEC.

٦- أثبت أن $b+e=c+d$ وبين لماذا الرباعي $DBCE$ مستطيلاً

السؤال (31) : في المستوي العقدية المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقطتين A و B التي يمثلها العددين $a=3+3i$ و $b=3-3i$:

١- بين أن a و b هما حلّا المعادلة $z^2-6z+18=0$.

٢- اكتب a بالشكل المثلثي ثم استنتج b بالشكل المثلثي ثم استنتج أن $a^4+b^4+648=0$.

٣- استنتج الشكل المثلثي للأعداد الآتية: $-a\ ,\frac{a^3}{b^5}\ ,a.b$

٤- احسب $\frac{a}{b}$ ثم استنتج أن المثلث AOB قائم ومتساوي الساقين.

٥- اعط الصيغة العقدية للانسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{OA}$.

٦- بفرض $T(B)=B'$. تحقق أن $b'=6$.

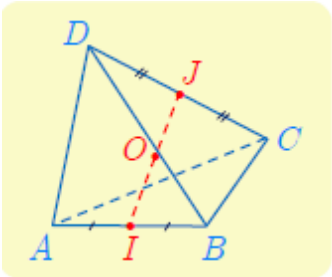
٧- مثل $A\ ,B\ ,B'$ في المستوي.

٨- بين أن $\frac{b-b'}{a-b'}=-i$ واستنتج طبيعة المثلث $BB'A$.

٩- استنتج أن الرباعي $OABB'$ مربع.

الأشعة في الفراغ

السؤال(1) : في الشكل المجاور $ABCD$ رباعي وجوه منتظم . النقطتان I و J منتصفي الضبعين $[AB]$ و $[DC]$ على الترتيب . و أخيراً O منتصف $[IJ]$



١- أثبت أن $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ و ماذا تستنتج ؟

٢- بفرض K منتصف $[AD]$ و L منتصف $[BC]$.

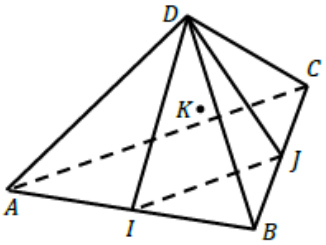
أثبت أن $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

و ما هي طبيعة الرباعي $IKJL$

السؤال(2): $ABCD$ رباعي وجوه و النقطتين E,F معرفتين وفق $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

و بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,3),(C,1),(D,2)$. أثبت أن G تقع على $[EF]$ ثم عين النقطة G على $[EF]$.

السؤال (3):

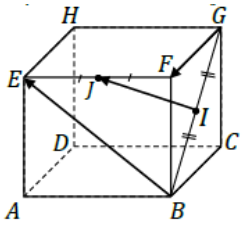


$D-ABC$ رباعي وجوه فيه I منتصف $[AB]$ والنقطة J منتصف $[BC]$ والنقطة K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$(A;1)$, $(B;3)$, $(C;2)$, $(D;3)$

أثبت أن النقاط D , K , I , J تقع في مستو واحد.

السؤال(4):



$ABCDEFGH$ مكعب وفيه I منتصف $[BG]$ و J منتصف $[EF]$.

١- أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{BE}$ مرتبطة خطياً.

٢- أثبت أن المستقيم (IJ) يوازي المستوي (CBE).

السؤال (5):

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,3,2)$ و $B(3,-1,3)$ ومستوياً P يقبل $\vec{u}(2,1,0)$ و $\vec{v}(3,2,2)$ شعاعين

موجهين له. أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P ثم اكتب معادلة ديكارتية للمستوي P إذا علمت أنه مار بالمبدأ.

السؤال(5) :

ليكن P, Q المستويين المعرفين وفق :

$$P: x+y-2z-1=0$$
$$Q: x+y+z=0$$

١- تحقق أن P, Q متعامدان

٢- احسب بعد النقطة $A(2,1,2)$ عن كلٍ من المستويين P, Q

٣- استنتج بعد A عن الفصل المشترك للمستويين P, Q

السؤال(6): اكتب معادلة الكرة التي مركزها $A(2,-2,2)$ و تمس المستوي

$$x+2y+3z=5$$

السؤال (8): بفرض A, B نقطتين في معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. و I منتصف $[AB]$

١- أثبت أنه من أجل أي نقطة من الفراغ M تتحقق العلاقة

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = MI^2 - AI^2$$

٢- صف ε مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ المحققة للشرط $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

٣- جد المعادلة الديكارتية للمجموعة ε

السؤال (8):

ليكن d, d' المستقيمان المعرفان وسيطياً وفق :

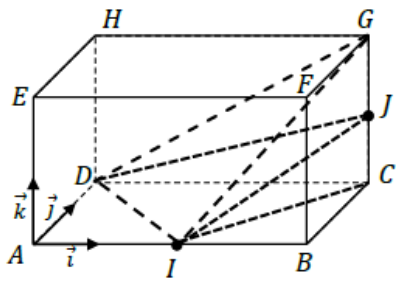
$$d:\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t \\ z=3-t \end{cases} : t\in R \quad ,$$

$$d':\begin{cases} x=-2\lambda+1 \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda+4 \end{cases} : \lambda\in R$$

أثبت أنهما متوازيان . بيّن فيما إذا كانا طبوقين

السؤال(9):

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=4$ و $CH=BC=2$ والنقطتان I و J منتصفا $[AB]$ و $[CG]$ على الترتيب , ولنختر معلماً متجانساً $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ حيث $\vec{\imath}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\vec{\jmath}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ و $\vec{k}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ والمطلوب:



١- أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطياً.

٢- أثبت $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{ID}=0$.

٣- بفرض V_1 حجم رباعي الوجوه $GCID$

V_2 حجم رباعي الوجوه $JCID$

V حجم رباعي الوجوه $GJID$

أثبت أن $V_1=2V_2$,

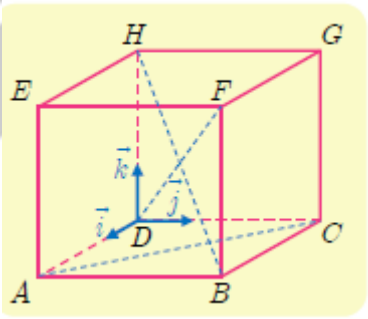
واستنتج قيمة V

السؤال (١٥):

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2 نعرف

عليه المعلم المتجانس : $(D,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

حيث $2\vec{i}=\overrightarrow{DA}$,$2\vec{j}=\overrightarrow{DC}$, $2\vec{k}=\overrightarrow{DH}$



١- جد إحداثيات الرؤوس

٢- هل المستقيمين $(DF),(HB)$

متعامدان و ما هي طبيعة $DBFH$

٣- احسب مساحة DBFH

٤- اكتب معادلة المستوي $(DBFH)$

٥- بفرض I منتصف $[AE]$. احسب بعد

I عن المستوي $(DBFH)$

٦- احسب حجم الهرم $I-DBFH$

٦- احسب حجم المكعب $ABCDEFGH$

ثم استنتج حجم الفراغ المحصور

بين المكعب و الهرم

٨- اكتب معادلة P المستوي المحوري

للقطعة $[AE]$

٩- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d

الفصل المشترك للمستويين

$P,(DBFH)$

١٠- بفرض $\vec{u}$ شعاع توجيه

للمستقيم d أثبت ان $\vec{u}=\alpha\overrightarrow{DB}+\beta\overrightarrow{DA}$ حيث α,β ثوابت يُطلب

تعيينها

١١- استنتج أن المستقيم d يوازي

المستوي $(ABCD)$

١٢- ادرس تقاطع المستويات

$P,(DBFH),(ABCD)$

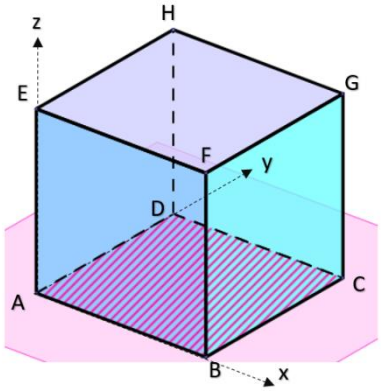
١٣- اكتب معادلة المجسم الناتج

عن دوران المربع $DBFH$ حول

ضلعه DH

السؤال (11):

في الشكل المجاور $\left(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$



1- جد إحداثيات الرؤوس

2- جد معادلة المستوي (EDB)

3- احسب حجم رباعي الوجوه $E-ABD$

4- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A ومعامد للمستوي (EDB) ثم استنتج A' مسقط A القائم على المستوي (EDB)

5- استنتج بعد A عن المستوي (EDB) ثم استنتج مساحة المثلث EDB

6- جد معادلة المجسم الناتج عن دوران المثلث AFE حول ضلعه AE ثم احسب حجمه

7- جد عددين حقيقين a,b يحققان أن :

$$\overrightarrow{EA'}=a\overrightarrow{EB}+b\overrightarrow{ED}$$

8- أثبت أن A' مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(E,\alpha),(B,\beta),(D,\gamma)$ حيث α,β,γ ثوابت يطلب تعيينها

9- بفرض L مسقط A' على المستوي $(ABCD)$ و Y مسقط L على المستقيم (AD)

احسب LY

10- اكتب معادلة المستوي P المار من D,B و معامد للمستوي (EDB)

11- استنتج بعد G عن Δ الفصل المشترك للمستويين $P,(EDB)$

12- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ

13- أثبت أن المستقيمين d,Δ متخالفان

14- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها A و نصف قطرها $\sqrt{3}$

15- أثبت أن الكرة S تقطع المستوي (EBD) في دائرة يُطلب تعيين مركزها Ω و نصف قطرها r_c

16- صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ المحققة للشرط :

$$\left\|\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|\right\| = \left\|\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|\right\|$$

ثم اكتب معادلتها الديكارتية

16- بفرض K نظيرة B بالنسبة للنقطة A

أ- أثبت أن $\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{BM}=0$ تكافئ المساواة $MA^2=AK^2$

ب- استنتج أنها تمثل الكرة S

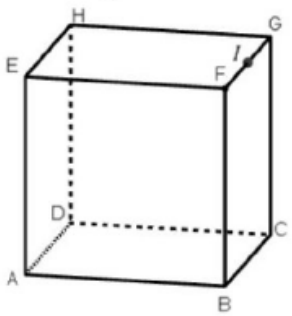
18- عين موضع النقطة N المحققة للشرط :

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{EH}-\overrightarrow{CD}$$

19- احسب $\cos(B\hat{E}D)$

20- ليكن Q المستوي المحوري للقطعة $[AC]$ اكتب معادلة المستوي Q

السؤال(12): في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب و I منتصف $[FG]$

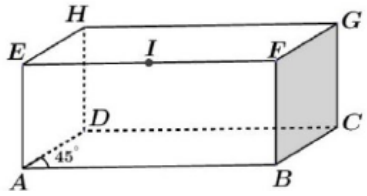


والمطلوب: عين النقطة M التي تحقق:

$$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GI}$$

السؤال(13):

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$ وقياس الزاوي $\widehat{DAB}$ يساوي $45°$ والنقطة I منتصف $[EF]$:



1- احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

2- عين موضع النقطة M التي تحقق:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

السؤال (14): نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقاط الآتية:

$$A(2,0,1)\ ,B(1,-2,1)\ ,C(5,0,5)\ ,D(6,2,5)$$

1- أثبت أن $\overrightarrow{AC}\ ,\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً.

2- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث:

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

واستنتج أن النقاط D,C,B,A تقع في مستو واحد.

السؤال(15):

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقطة $A(2,1,2)$ والمستوي $P:2x+y-2z-4=0$.

١- احسب بعد النقطة A عن المستوي P.

٢- اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

السؤال(16) : في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ والمطلوب:

١- احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ ثم استنتج $\cos(\widehat{BAC})$.

٢- إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC, عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق:

$$\left|\left|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$$

السؤال(17):

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-2,1)$ والمطلوب:

أعط معادلة للمجموعة S المكون من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة:

$$MA = MB$$

وما طبيعة المجموعة S.

السؤال (18):

المستقيمين d و d' معرفان وسيطياً وفق:

$$d:\begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t+1 \\ z = -t \end{cases};\ t\in\mathbb{R}$$

$$d':\begin{cases} x = 2s-1 \\ y = s-2 \\ z = 3s-2 \end{cases};\ s\in\mathbb{R}$$

المطلوب:

١- أثبت أن d و d' متقاطعان ثم عين احداثيات I نقطة التقاطع.

٢- جد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين d و d'

السؤال (20):

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(2,2,4)$, $B(2,0,-2)$:

١- اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

٢- اعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ، ما طبيعة المجموعة S

السؤال(21) : لتكن S الكرة التي مركزها $A(1,1,1)$ ونصف قطرها $r=3$ والمستوي:

$$P: x-z=1$$

أثبت أن المستوي P يقطع الكرة S في دائرة C, عين مركزها ونصف قطرها

شغف الرياضيات

مسائل شامل في الأشعة

المسألة الأولى

في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط :

$A(2,-2,2), B(1,1,0), C(1,0,1), D(0,0,1)$

1- تحقق أن النقاط (BCD) لا تقع على استقامة واحدة

2- أثبت أن $y+z-1=0$ هي معادلة المستوي (BCD)

3- أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من A ويعامد المستوي (BCD)

4- عين إحداثيات K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD)

5- اكتب معادلة الكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً لها

المسألة الثانية

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$E(1,-1,1)\ , D(0,4,0)\ , C(4,0,0) \quad B(1,0,-1), A(2,1,3)$

1- جد $\overrightarrow{AB}\ , \overrightarrow{CE}\ , \overrightarrow{CD}$.

2- أثبت أن النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

3- أثبت أن (AB) يعامد للمستوي (CDE).

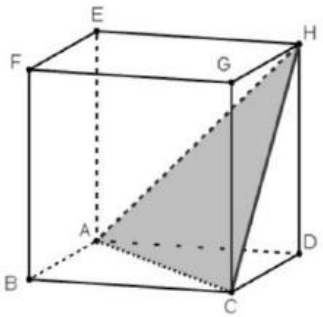
4- اكتب معادلة المستوي (CDE).

5- احسب بعد B عن المستوي (CDE).

6- اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE).

المسألة الثالثة

نتأمل في معلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$.



1- اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط:

$A\ , C\ , H\ , F, D$

2- اكتب معادلة المستوي (ACH).

3- أثبت أن المستوي P الذي معادلته:

$$P: -2x + 2y - 2z + 1 = 0$$

يوازي المستوي (ACH).

4- بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن D و I و F على استقامة واحدة.

5- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S.

6- احسب حجم رباعي الوجوه $H - ACD$

7- احسب بعد D عن المستوي (ACH) ثم استنتج مساحة المثلث ACH

المسألة الرابعة

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$$D(1,1,1)\ ,C(0,0,1)\ ,B(0,1,0)\ ,A(1,0,0)$$

1- جد إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC, وأثبت أن (OG) عمودي على المستوي (ABC).

2- جد معادلة المستوي (ABC).

3- نعرف النقاط $A'(2,0,0)\ ,B'(0,2,0)\ ,C'(0,0,4)$ للمستوي $A'B'C'$. أثبت أن $2x + 2y + z - 4 = 0$ معادلة المستوي $(A'B'C')$.

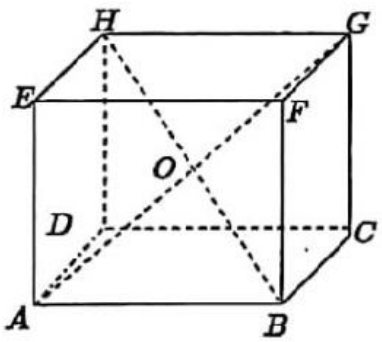
4- أثبت أن Δ الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$ يقبل التمثيل الوسيطي:

$$\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t; t \in \mathbb{R} \\ z = -2 \end{cases}$$

5- احسب بعد النقطة $D(1,1,1)$ عن المستقيم Δ.

المسألة الخامسة

مكعب طول حرفه 2, O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$.



نختار معلم متجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$. والمطلوب:

1- جد إحداثيات النقاط A و B و G و H و O.

2- أعط معادلة المستوي (GOB).

3- احسب $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}$ واستنتج $\cos\widehat{GOB}$.

4- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC).

5- أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB).

6- جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).

المسألة السادسة

$ABCDEFG$ مكعب طول حرفه يساوي 2, نتأمل المعلم المتجانس $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ في المعلم $\overrightarrow{AB}=2\vec{\imath}$ و $\overrightarrow{AD}=2\vec{\jmath}$ و $\overrightarrow{AE}=2\vec{k}$:

1- اكتب معادلة المستوي (GBD).

2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (EC).

3- جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD).

4- جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$$

5- أثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC).

المسألة السابعة

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$$A(-1,2,3)\ ,B(2,1,1)\ ,C(-3,4,-1)\ ,D(3,1,1)$$

1- جد $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ وبين أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان.

2- أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC).

3- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة D والعمودي على المستوي (ABC).

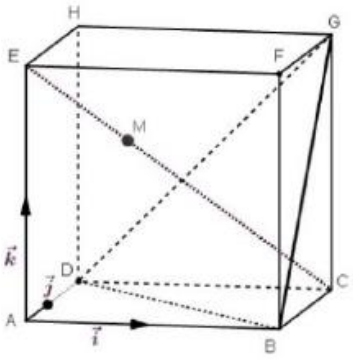
4- احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$.

5- بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ أثبت أن المستقيمين (CG) و (AB) متوازيان.

المسألة الثامنة

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(1,1,2)$ والمستويان:

$$P: x-y+2z-1=0$$
$$Q: 2x+y+z+1=0$$



1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان في فصل مشترك d.

2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d.

3- اكتب معادلة المستوي R المار من A المعامد للمستويين P و Q.

4- جد إحداثيات B الناتجة من تقاطع المستوي R والمستقيم d.

5- احسب بعد النقطة A عن المستقيم d.

6- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q.

المسألة التاسعة

في معلمٍ متجانس نتأمل النقطة $A(1,2,0)$ و المستويات :

$$P: 2x-y+2z-2=0$$
$$Q: x+y+z-1=0$$
$$R: x-z-1=0$$

1- أثبت أن المستويين P, Q متقاطعان في فصل مشترك Δ . اكتب تمثيله الوسيطي

2- تحقق أن المستوي R يعامد Δ و يمر من A

3- أثبت تقاطع المستويات P, Q, R في نقطة I يُطلب تعيينها

4- استنتج بعد A عن المستقيم Δ

المسألة العاشرة

في معلمٍ متجانس :

$$A(1,1,0), B(1,2,1), C(4,0,0)$$

1- تحقق ان A, B, C ليست على استقامة واحدة

2- أثبت أن المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة $x + 3y - 3z - 4 = 0$

3- ليكن المستويان :

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$
$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في فصل مشترك d له التمثيل الوسيطي

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad t \in R$$

4- ما هي نقطة تقاطع المستويات

$$P, Q, (ABC)$$

5- احسب بعد A عن المستقيم d

المسألة الحادية عشر

في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط :

$$A(1,3,0), B(0,6,0), N(0,0,3), M(0,6,2)$$

1- اكتب معادلة المستوي (AMN)

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من O ومعامد للمستوي (AMN)

3- أثبت أن المستوي الذي معادلته $z - 1 = 0$ هو المستوي المحوري للقطعة $[BM]$.

المسألة الثانية عشر

1- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

2- تحقق ان المستوي P الذي معادلته:

$$P: x - y + z + 3 = 0$$

يمس الكرة S.

المسألة الثالثة عشر

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لتكن النقطة $A(1,-2,0)$ والمستوي $P: x+2y+z-1=0$:

احسب بعد النقطة A عن المستوي P ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

المسألة الرابعة عشر

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$:

١- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A ويشبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$.

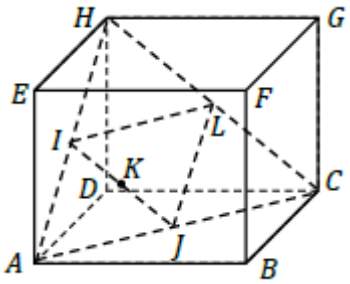
٢- أثبت أن المستقيمين (AB) و d متعامدان.

المسألة الخامسة عشر

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 4 , I مركز الوجه $ADHE$, J مركز الوجه $ABCD$, L مركز الوجه $DCGH$, K منتصف $[IJ]$. نتأمل المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)$.

١- هل A,K,G على استقامة واحدة؟

٢- أثبت أن الرباعي $AJLI$ معين.



٣- أثبت أن النقاط A,K,G,D تقع في مستو واحد.

٤- استنتج أن النقطة A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة D,G,K يطلب إيجاد تثقيلاتها.

٥- اكتب معادلة المستوي (AHC).

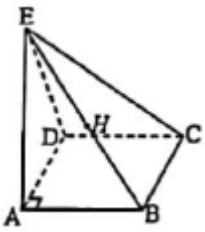
٦- احسب بعد F عن المستوي (AHC) ثم استنتج حجم المجسم $F-AHC$.

٧- احسب حجم الهرم $F-IJL$

٨- استنتج حجم الفراغ المحصور بين الهرمين $F-AHC$ و $F-IJL$.

المسألة السادسة عشر

$EABCD$ هرم رباعي رأسه E وقاعدته مربع طول ضلعه 3, $[AE]$ عمودي على $(ABCD)$ و $EA = 3$.



نختار المعلم المتجانس: $\left(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

3- عين إحداثيات A, B, C, D, E.

4- جد معادلة المستوي (EBC).

5- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC).

6- استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC).

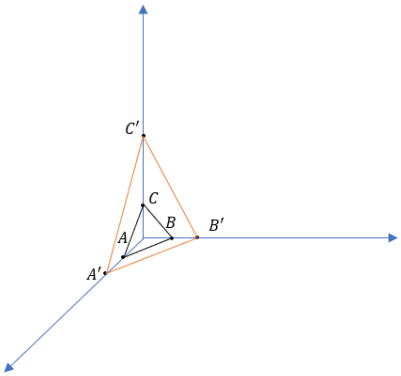
7- احسب حجم رباعي الوجوه $AEBC$

8- حسب حجم الهرم $E-ABCD$ ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $E-DBC$

المسألة (1 VIE)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$D(1,1,1), C(0,0,1), B(0,1,0), A(1,0,0)$



1- جد إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC, وأثبت أن (OG) عمودي على المستوي (ABC).

2- جد معادلة المستوي (ABC).

3- نعرف النقاط $A'(2,0,0), B'(0,2,0), C'(0,0,4)$

للمستوي $A'B'C'$. أثبت أن $2x+2y+z-4=0$ معادلة المستوي $(A'B'C')$.

4- أثبت أن Δ الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$ يقبل التمثيل الوسيطي:

$$\Delta:\begin{cases} x=t \\ y=3-t; t\in\mathbb{R} \\ z=-2 \end{cases}$$

5- احسب بعد النقطة $D(1,1,1)$ عن المستقيم Δ.

6- احسب حجم رباعي الوجوه $A'-OB'C'$

7- احسب بعد النقطة O عن المستوي $(A'B'C')$ ثم استنتج مساحة المثلث $A'B'C'$.

مراجعات هامة

حول النهايات اللوغارتمية والأسية

النهايات البسيطة	$\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$ $\lim\limits_{x\to0^+} lnx = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
نهايات حكم القوي على الضعيف	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{lnx} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
عند الصفر	$\lim\limits_{x\to0} xlnx = 0$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
عند الواحد	$\lim\limits_{x\to1} \frac{lnx}{x-1} = 1$ $\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{lnx} = 1$
عند $-\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

تحويلات سريعة

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$-i = e^{\frac{-i\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$-1 = e^{i\pi} = \cos(\pi) + isin(\pi)$$
$$1+i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$1-i = \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

الكسر الذهبي

هو كسر من الشكل $\frac{b-a}{c-a}$ و يجب كتابته بالشكل الأسي

$$\boxed{\frac{b-a}{c-a} = re^{i\theta}}$$

ثم نحدد $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \theta$ و $\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = r$ ثم نميز الحالات الآتية :

1- إذا كان $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ كان المثلث قائماً في A

2- إذا كان $\theta > \frac{\pi}{2}$ كان المثلث منفرج الزاوية A

3- إذا كان $r = 1$ كان المثلث متساوي الساقين رأسه A

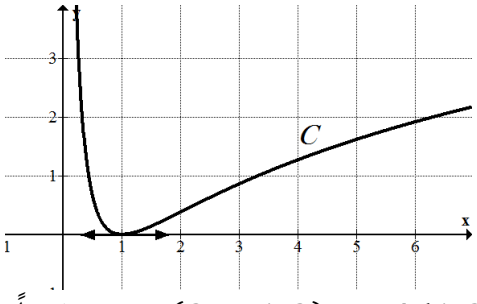
4- إذا كان $r = 1$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ كان المثلث متساوي الأضلاع

		5- إذا كان $\theta \in \{0,\pi\}$ كانت النقاط A, B, C على استقامة واحدة 6- إذا كان $\frac{b-a}{c-a} = k \in \mathbb{R}^*$ كانت A, B, C على استقامة واحدة ٦- إذا كان $\frac{b-a}{c-a} = \frac{d-a}{b-a}$ كان المستقيم (AB) منصف للزاوية $\widehat{CAD}$
خواص arg		$\arg(z.w) = \arg(z) + \arg(w)$ $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$ $\arg(z^n) = narg(z)$ $\arg(\bar{z}) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
التحويلات الهندسية	التناظر	M' صورة M وفق تناظر مركزه $\Omega(w)$: $z' - w = -(z - w)$
	التحاكي	M' صورة M وفق تحاكٍ مركزه $\Omega(w)$ و نسبته $k \in \mathbb{R}^*$: $z' - w = k(z - w)$
	الدوران	M' صورة M وفق دوران مركزه $\Omega(w)$ و زاويته θ: $z' - w = e^{i\theta}(z - w)$
	الانسحاب	M' صورة M وفق انسحاب شعاعه $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ أو يكتب بالشكل $\vec{w} = (\alpha, \beta)$ $z' - z = z_{\vec{w}}$:
	التناظر المحوري	التناظر بالنسبة لمحور الفواصل : $z' = \bar{z}$ التناظر بالنسبة لمحور التراتيب $z' = -\bar{z}$

شغف الرياضيات

أولاً - <u>أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية</u> : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ والمطلوب :



١- جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$

٢- دل على القيمة الحدية المحلية للتابع f مبيناً نوعها.

٣- جد حلول المتراجحة $f'(x) \le 0$.

٤- جد مجموعة تعريف التابع : $g: x \to ln\big(f(x)\big)$

السؤال الثاني : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,3,2)$, $B(3,-1,3)$ ومستوياً P يقبل $\vec{u}(2,1,0)$, $\vec{v}(3,2,2)$ شعاعين موجهين له . أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P ثم اكتب معادلة ديكارتية للمستوي P إذا علمت أنه مار من المبدأ .

السؤال الثالث :

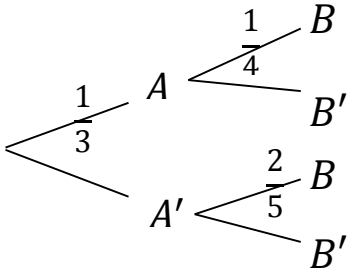
ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق $f(x) = \sqrt{x}.Sin\sqrt{x}$

١- أثبت أن f اشتقاقي عند (0) وأوجد $f'(0)$.

٢- اكتب معادلة لمماس الخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 0$ منه .

السؤال الرابع :

ليكن A , B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية ممثلة بالمخطط الشجري المجاور



المطلوب : أكمل المخطط الشجري ثم احسب $p(A|B)$.

السؤال الخامس : ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ والمطلوب :

ادرس تغيرات التابع f واستنتج أنه تابع محدود .

السؤال الساس : عيّن قيم العدد الطبيعي n التي تحقق المساواة التالية : $12\binom{n+2}{4} = 7p_n^3$.

ثانياً – <u>حل التمارين الثلاثة الآتية</u> : (70 درجة لكل من التمرينين الأول والثاني – 60 للتمرين الثالث)

التمرين الأول :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق : $f(x) = ax + b - ln\,x$

١) جد العددين a , b إذا علمت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 1$ مماس للخط C في نقطة A منه فاصلتها 1 .

٢) من أجل $a = 1$, $b = 0$ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

يتبع في الصفحة الثانية

الصفحة الثانية

التمرين الثاني : المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 2$ وعند كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ المطلوب:

١) أثبت أن $u_n > 1$ أياً كان العدد الطبيعي n .

٢) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها .

٣) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة : $v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$ والمطلوب :

- أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حسابية . ● اكتب v_n بدلالة n واستنتج أن : $u_n = \frac{n+2}{n+1}$.

التمرين الثالث : نتأمل معلماً متجانساً $(O;\vec{u},\vec{v})$ في المستوي العقدي

١) ليكن العدد العقدي $w = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$ أثبت أن $|w| = 1$

٢) تحقق أن $z_1 = i\sqrt{3}$ حلاً للمعادلة : $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z + i\sqrt{3} = 0$ ثم جد z_2 الحل الآخر.

٣) لتكن النقاط M و M_1 و M_2 التي تمثلها الأعداد العقدية السابقة w و z_1 و z_2 بالترتيب إذا علمت أن M_1 صورة M وفق تحاك مركزه M_2 ونسبته k احسب k .

ثالثاً – <u>حل المسألتين الآتيتين</u> : (100 درجة لكل مسألة)

<u>المسألة الأولى</u> : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط :

$A(1,-1,3)$, $B(0,3,1)$. $C(6,-7,-1)$, $D(2,1,3)$, $E(4,-6,2)$ والمطلوب :

١) أثبت أن E مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة : $(A;2)$, $(B;-1)$, $(C;1)$.

٢) بين أن المجموعة ε المكونة من النقاط M التي تحقق العلاقة:

$\left\|2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{21}$ هي كرة مركزها E ونصف قطرها $R = \sqrt{21}$.

٣) بين أن النقاط A , B , D تعين مستوياً اكتب معادلته .

٤) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC) ثم بين أن (EC) يعامد المستوي (ABD) بنقطة H يُطلب إيجاد احداثياتها .

٥) إذا علمت أن مساحة المثلث ABD هي $\sqrt{14}$ فاحسب حجم الهرم (E,ABD) .

<u>المسألة الثانية</u> : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4$ والمطلوب :

١) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - 4$ مقارب مائل للخط C ثم ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب Δ .

٢) ادرس تغيرات التابع f ، ونظم جدولاً بها وبين ما للتابع من قيم حدية محلية وما للخط البياني من مستقيمات مقاربة أفقية أو شاقولية .

٣) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلين مختلفين واحصر كل منهما بين عددين صحيحين متتاليين.

٤) ارسم كل مقارب وجدته ، ثم ارسم C .

٥) احسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 3$ و $x = 4$.

انتهت الأسئلة

أولاً - <u>أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية</u> : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول :نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على المجال $R\backslash\{-1,2\}$ خطه البياني C .

١- اكتب معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي للخط C

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖	$-$	$-$	‖	$+$		
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖	$+\infty$	↘	0 ↘	$-\infty$ ‖	$-\infty$	↗ 0

٢- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

٣- جد حلول المتراجحة $f'(x)<0$

٤- جد مجموعة تعريف التابع :

$$g: x \to ln\big(-f(x)\big)$$

السؤال الثاني : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل المستقيمين d , d'

$$d:\begin{cases} x=2t+3 \\ y=-3t-3 \\ z=4t+6 \end{cases} : t\in R \quad \text{و} \quad d':\begin{cases} x=-4s+1 \\ y=6s \\ z=-8s+2 \end{cases} ; s\in R$$

أثبت أن المستقيمين d , d' منطبقان

السؤال الثالث :

ليكن f التابع المعرف على المجال $I=[1,+\infty[$ وفق $f(x)=x+\sqrt{x-1}$ أثبت أن $f(I)=I$

السؤال الرابع : ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{0\}$ وفق $f(x)=2+xSin\frac{1}{x}$:

١) تحقق أن $|f(x)-2|\leq|x|$ أياً كانت $x\in R\backslash\{0\}$.
٢) استنتج نهاية التابع f عند الصفر .

السؤال الخامس : حل في R المعادلة : $4^x-3\times2^x+2=0$

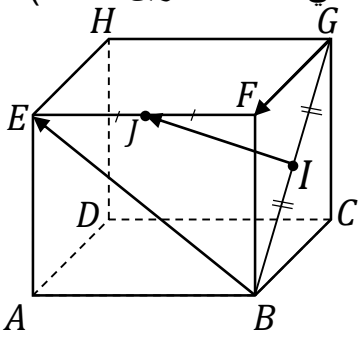
ثم استنتج حلول المتراجحة : $4^x-3\times2^x+2>0$

السؤال الساس: مغلف يحوي 7 بطاقات متماثلة مرقمة $\{1,2,3,\dots,7\}$ نسحب من المغلف ثلاث بطاقات معاً.

١) ما عدد النتائج المختلفة لهذا السحب .
٢) ما عدد النتائج المختلفة لظهور ثلاثة أرقام مجموعها من مضاعفات العدد 2 .

ثانياً – <u>حل التمارين الثلاثة الآتية</u> : (70 درجة لكل من التمرينين الأول والثاني – 60 للتمرين الثالث)

التمرين الأول :



$ABCDEFGH$ مكعب و I منتصف $[BG]$ و J منتصف $[EF]$.

١) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطياً .
٢) أثبت أن المستقيم (IJ) يوازي المستقيم (CBE) .

يتبع في الصفحة الثانية

الصفحة الثانية

التمرين الثاني : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ والمطلوب:

١) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ تكتب بالصيغة : $u_n = a + b\left(\frac{1}{2}\right)^n$ حيث a, b عددان حقيقيان يُطلب تعيينهما.

٢) إذا علمت أن $a = 1\,, b = -1$ ولنعرف المتتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ وفق : $t_n = 1 + \frac{1}{n}$
أثبت أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(t_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان .

التمرين الثالث : في المستوي العقدي المنسوب إلى المعلم المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لدينا النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية : $z_A = \sqrt{3}+i$, $z_B = \sqrt{3}-i$, $z_C = 3\sqrt{3}+i$ على الترتيب

١) عين مجموعة النقط $M \neq B$ التي تجعل العدد العقدي $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً بحتاً .

٢) جد العدد العقدي z_D الممثل للنقطة D صورة النقطة B وفق الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

٣) جد العدد العقدي $w = z_A - z_B$ ثم حل في C المعادلة $Z^2 = w$.

ثالثاً – <u>حل المسألتين الآتيتين</u> : (100 درجة لكل مسألة)

<u>المسألة الأولى</u>: أولاً - يحتوي صندوق U_1 على كرتين حمراوين وثلاث كرات زرقاء ويحتوي صندوق U_2 على n كرة حمراء وكرتين زرقاوين نختار بشكل عشوائي أحد الصندوقين ونسحب منه عشوائياً كرة واحدة . ليكن الحدث R الحصول على كرة حمراء و ليكن الحدث B الحصول على كرة زرقاء .
إذا علمت أن $p(U_1|R) = \frac{2}{5}$ ، فاحسب n عدد الكرات الحمراء في الصندوق U_2 .

ثانياً - نأخذ الصندوق U_1 الذي يحتوي على كرتين حمراوين وثلاث كرات زرقاء ونسحب منه كرة نسجل لونها ثم نعيدها إلى الصندوق مع إضافة كرة من لونها ، بعدها نسحب كرة واحدة من الصندوق . وليكن X متحولاً عشوائياً يدل على عدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق بعد السحب الثاني .
عين قيم المتحول العشوائي X ، واكتب قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي .

<u>المسألة الثانية</u> :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ والمطلوب :

١) جد نهاية التابع f عند طرفي مجموعة تعريفه . وبيّن ما لخطه البياني C من مقاربات أفقية أو شاقولية . ثم ادرس الوضع النسبي للخط C مع مقاربه الأفقي .

٢) ادرس تغيرات التابع f ، ونظم جدولاً بها . وعين قيمته الحدية المحلية ونوعها .

٣) ارسم في معلم متجانس كل مقارب وجدته للخط C ثم ارسم C .

٤) ناقش بيانياً بحسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.

٥) أثبت وجود عددان حقيقيان $a\,, b$ موجبان تماماً يحققان $\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b}$.

٦) احسب S مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحور الفواصل والمستقيم الذي معادلته $x = e$

انتهت الأسئلة

أولاً - <u>أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية</u> : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية توقعه الرياضي $E(X) = 1$. والمطلوب: أكمل الجدول الآتي الذي يمثل قانونه الاحتمالي :

x	0	1	2	3
$p(X = x)$				

السؤال الثاني : في معلم متجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ لتكن لدينا النقطتان $A(5,2,3)$, $B(3,4,-1)$ ومستوياً P . ولتكن النقطة B هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي P ، أعط معادلة ديكارتية لـ P.

السؤال الثالث : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]-1, +\infty[$ وفق:

$f(x) = 2\sqrt{x+1} - x$ بفرض A , B , C ثلاث نقاط من C_f فواصلها على الترتيب هي :

0 و $1-$ و 3 والمطلوب : اثبت أن المماس للخط C_f في النقطة A يوازي المستقيم (BC) .

السؤال الرابع : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1, +\infty[$ وفق:

$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$ والمطلوب :

١) اكتب $f(x)$ بالصيغة : $f(x) = ax + \frac{b}{x-1}$ ، حيث a , b ثوابت حقيقية .
٢) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل لـ C_f .
٣) ادرس الوضع النسبي للخط C_f ومقاربه Δ .

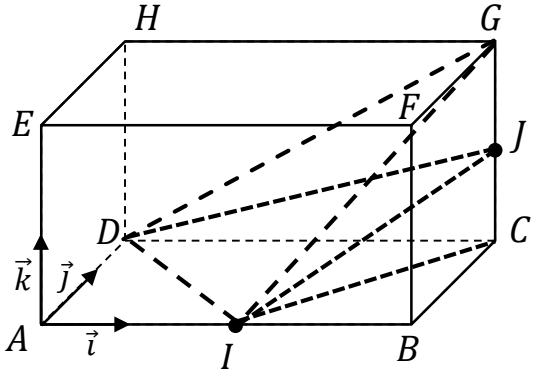
السؤال الخامس : حل المتراجحة : $2\ln^2 x \geq \ln x^2$.

السؤال الساس: عين التابع الأصلي الذي ينعدم عند $x = \pi$ للتابع $f: x \to Sin\ 2x.Cos^2 x$ المعرف على R

ثانياً – <u>حل التمارين الثلاثة الآتية</u> : (80 درجة للتمرين الأول – 60 لكل من التمرينين الثاني والثالث)

التمرين الأول : $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 4$ و $CG = BC = 2$.

والنقطتان I و J منتصفا $[AB]$ و $[CG]$ على الترتيب ، ولنختر معلماً متجانساً $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ حيث $\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ و $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ والمطلوب :



١) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطياً .
٢) أثبت $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{ID} = 0$.
٣) بفرض V_1 حجم رباعي الوجوه $GCID$
V_2 حجم رباعي الوجوه $JCID$
V حجم رباعي الوجوه $GJID$
أثبت أن $V_1 = 2V_2$ ، واستنتج قيمة V .

يتبع في الصفحة الثانية

الصفحة الثانية

التمرين الثاني : لتكن لدينا المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتان وفق :

$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = x_n + 2 \end{cases}$ ، $\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$ والمطلوب :

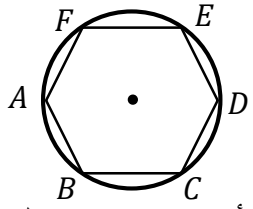
١) أثبت أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية ، عين أساسها r ، ثم اكتب x_n بدلالة n .

٢) ادرس اطراد المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$.

٣) أثبت أن $y_{n+1} = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

٤) استنتج عبارة y_n بدلالة n ، هل المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ متقاربة أم متباعدة ؟ ولماذا ؟

التمرين الثالث: في الشكل المرسوم جانباً لدينا ست نقاط : A و B و C و D و E و F موزعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدس منتظم . والمطلوب :



١) a) ما عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من رؤوس المسدس.

b) ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن تشكيلها من رؤوس المسدس.

٢) ما عدد الأشكال الرباعية التي يمكن تشكيلها من رؤوس المسدس .

٣) ما عدد الكلمات المؤلفة من أربعة أحرف مختلفة والتي يمكن تشكيلها من أحرف رؤوس المسدس .

ثالثاً – <u>حل المسألتين الآتيتين</u> : (100 درجة لكل مسألة)

<u>المسألة الأولى</u>: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \frac{1-e^x}{e^x+1}$ والمطلوب:

١) أثبت أن المستقيمين d_1 الذي معادلته $y = 1$ و d_2 الذي معادلته $y = -1$ مقاربان للخط C_f.

٢) أثبت أن f تابع فردي، ثم اذكر الصفة التناظرية لخطه البياني C_f .

٣) ادرس تغيرات التابع f ، ونظم جدولاً بها .

٤) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في المبدأ O . ثم ادرس وضع C_f بالنسبة إلى T .

٥) ارسم في معلم متجانس كلاً من: d_1 , d_2 , T , C_f .

٦) ارسم الخط البياني C_h للتابع $h(x) = \frac{|1-e^x|}{e^x+1}$ المعرف على R ، وذلك انطلاقاً من C_f .

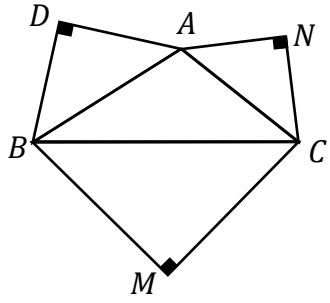
<u>المسألة الثانية</u> : نتأمل في المستوي العقدي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً . ننشئ خارجه النقاط D و M و N التي تجعل المثلثات DBA و MCB و NAC قائمة في D و M و N بالترتيب ، ومتساوية الساقين كما في الشكل المجاور.

بفرض a و b و c و d و m و n الأعداد العقدية الممثلة بالترتيب للنقاط :

A و B و C و D و M و N . والمطلوب :

١) إذا كانت النقطة $F'(z')$ هي صورة $F(z)$ وفق دوران ربع دورة مباشرة حول $\Omega(\omega)$، فأثبت أن :

$$\omega = \frac{1}{2}[(1-i)z + (1+i)z']$$



٢) اكتب d بدلالة a و b ، واكتب m بدلالة b و c واكتب n بدلالة C وa .

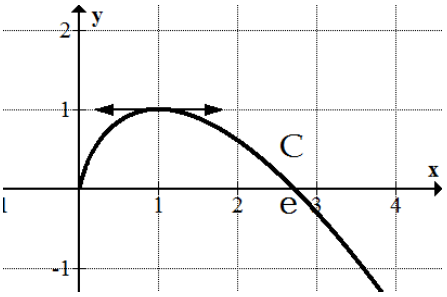
٣) استنتج أن للمثلثين DMN و ABC مركز الثقل ذاته .

٤) نختار معلماً مباشراً متجانساً مبدؤه النقطة A . أثبت أن المستقيمين (AM) و (DN) متعامدان ، ثم استنتج أن $AM = DN$.

انتهت الأسئلة

أولاً - أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : نتأمل جانباً الخط C للتابع f المعرف على $]-\infty,0]$ والمطلوب:



١) جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $f'(1)$

٢) اكتب معادلة المماس الشاقولي للخط البياني C .

٣) ما هي القيم الحدية المحلية للتابع f وما نوعها .

٤) جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$.

٥) جد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

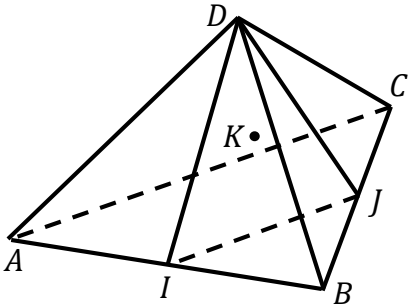
السؤال الثاني : أوجد نهاية التابع f عند $(x = -4)$: $f(x) = (5+x)^{\frac{3}{x+4}}$.

السؤال الثالث : ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = Sin^2x + Cosx$

١) قارن كلاً من $f(-x)$ و $f(x+2\pi)$ مع $f(x)$ واستنتج أنه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$.

٢) أثبت أن $f'(x) = Sinx(2Cosx - 1)$.

السؤال الرابع : $D-ABC$ رباعي وجوه فيه النقطة I منتصف $[AB]$ والنقطة J منتصف $[BC]$ والنقطة k مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة :



$(D;3)$, $(C;2)$, $(B;3)$, $(A;1)$.

أثبت أن النقاط J , I , K , D تقع في مستو واحد .

السؤال الخامس : في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة ، شكله رباعي وجوه منتظم متوازن تماماً مرقم من 1 إلى 4 نسجل رقم الوجه السفلي (قاعدة رباعي الوجوه) .

ليكن الحدثين : A : رقم الوجه السفلي فردي و B :رقم الوجه السفلي أولي .

١) أثبت أن الحدثين A و B مستقلان احتمالياً .

٢) ليكن X متحولاً عشوائياً يدل على رقم الوجه السفلي . اكتب القانون الاحتمالي للمتحول X واحسب توقعه الرياضي

السؤال الساس: لدينا 6 رفوف و 5 مزهريات مختلفة والمطلوب :

١) بكم طريقة يمكن توزيع المزهريات على الرفوف بحيث يبقى رف واحد فقط فارغ .

٢) بكم طريقة يمكن توزيع المزهريات على الرفوف بحيث يبقى اثنان من الرفوف فارغين .

ثانياً – حل التمارين الثلاثة الآتية : (70 درجة لكل من التمرينين الأول والثاني – 60 للتمرين الثالث)

التمرين الأول : لتكن النقاط A , B , C , D الي تمثلها على الترتيب الأعداد القدية $a = 1+2i$ و $b = -2+3i$ و $c = 2$ و $d = 2+i$ والمطلوب :

١) وضع النقاط A , B , C , D في شكل .

٢) جد العدد العقدي g الممثل للنقطة G مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

٣) أثبت أن $\frac{a-c}{d-c} = \frac{b-c}{a-c}$ ماذا يمثل المستقيم (AC) في المثلث BCD

يتبع في الصفحة الثانية

الصفحة الثانية

التمرين الثاني : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق : $\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{5}{2}u_n - u_{n-1} : n \geq 1 \end{cases}$

ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث : $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ والمطلوب :

١) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج أن $v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

٢) اكتب بدلالة n المجموع $S_n = v_2 + v_4 + v_6 + \cdots + v_{2n}$ واستنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$.

٣) ادرس اطراد المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ وبين أنها متقاربة .

التمرين الثالث: ليكن f تابع معرف على R وفق: $f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 3}$ والمطلوب :

١) أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ وأن $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$ حيث $b \in R$

٢) استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

٣) أوجد $f'(x)$ ثم استنتج مشتق التابع $g(x) = \sqrt{4tan^2x + 4\,tan\,x + 3}$.

ثالثاً – <u>حل المسألتين الآتيتين</u> : (100 درجة لكل مسألة)

<u>المسألة الأولى</u>: في معلم متجانس C_f و C_g هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I =]1,\infty[$ وفق : $f(x) = ln(x-1)$ و $g(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$.

١) أثبت أن $g(x) \leq f(x)$ أياً يكن x من I .

٢) ادرس تغيرات كلاً من f و g وبين ما لخطيهما من مستقيمات مقاربة أفقية أو شاقولية .

٣) أثبت أن C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 2$ وأوجد معادلته .
ثم ارسم المماس المشترك وكل مقارب وجدته والخطين البيانيين C_f و C_g .

٤) أوجد مساحة السطح المحصور بين C_f و C_g والمستقيمين $x = 2$ و $x = 3$

<u>المسألة الثانية</u> : نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(2,-2,1)$, $B(-1,4,-5)$ والمستويين $P: y + z + 1 = 0$ و $Q: 2x + 4y + 3z + 1 = 0$.

١) جد معادلة مجموعة النقط $N(x,y,z)$ المحققة للعلاقة $\|\overrightarrow{AN}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ مبيناً طبيعتها .

٢) أثبت أن المستقيم (AB) يقبل تمثيلاً وسيطياً بالشكل : $(AB): \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t - 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases} : t \in R$

٣) احسب بعد النقطة $E(-2,4,0)$ عن المستقيم (AB) . وعن المستوي P .

٤) بين أن المستويين P و Q متقاطعان ، وأثبت أن المستقيم (AB) هو الفصل المشترك لهما .

٥) أثبت أن المستوي $R: x - 2y + 2z = -1$ يعامد كلاً من المستويين P و Q ، ثم عين احداثيات نقطة تقاطع المستويات R و P و Q .

انتهت الأسئلة

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نتأمل جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ ، خطه البياني C

x	0		e		∞
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	-1	↗	$\frac{1}{e-1}$	↘	0

١) ما القيم الحدية المحلية للتابع f ؟ وما نوعها؟

٢) اكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي للخط C

٣) قارن بين $f(e^2)$ و $f(e^3)$ مبرراً إجابتك .

٤) احسب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}$

السؤال الثاني: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(2,0,0)$ و $M(2,3,4)$.

١) اكتب معادلة للمخروط الذي رأسه O ومحوره $(O;\vec{i})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها النقطة A ونصف قطرها 5

٢) اكتب معادلة للأسطوانة التي محورها $(O;\vec{i})$ وقاعدتيها الدائرتين اللتين مركزيهما النقطتين O و A ونصف قطرها 5

٣) أثبت أن النقطة M تنتمي إلى كل من الأسطوانة والمخروط السابقين .

السؤال الثالث: انشر المقدار $\left(\frac{x}{2}+1\right)^n$، ثم أثبت أن: $\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{4}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\binom{n}{n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n$

السؤال الرابع: نفترض وجود عددين حقيقين $0 > x > y$ يحققان :

$lnx + lny - ln2 = 2ln(y - x)$ جد y بدلالة x

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ وفق: $D =$

$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ والمطلوب :

١) جد نهاية التابع f عند $-\infty$ ، وفسّر النتيجة هندسياً.

٢) هل يقبل C مستقيماً مماساً موازياً للمستقيم Δ الذي معادلته: $y = x + 1$

٣) احسب حجم المجسم الناتج عن الدوران دورة كاملة حول محور الفواصل للسطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$

التمرين الثاني: ليكن لدينا العددان العقديان $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 2\left(Cos\frac{\pi}{3} + i\,Sin\frac{\pi}{3}\right)$

١) اكتب z_1 بالشكل المثلثي و z_2 بالشكل الجبري .

٢) اكتب $z_1.z_2$ بالشكلين الجبري والمثلثي واستنتج أن $Sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

٣) لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي z_1 . جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة النقطة M وفق التناظر الذي مركزه $A(1-2i)$.

يتبع في الصفحة الثانية

الصفحة الثانية

التمرين الثالث: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق $u_n = \frac{n!}{n^2}$:

١) احسب الحدود الأربعة الأولى من المتتالية . ٢) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

٣) أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $n! \geq n(n-1)(n-2)$:أياً كان العدد الطبيعي$n \geq 3$

ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ وهل هي متقاربة أم متباعدة؟

التمرين الرابع: صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وكرتين زرقاوين، يسحب لاعب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة. فإذا علمت أن اللاعب يكسب نقطة واحدة عن كل كرة حمراء مسحوبة، ويخسر نقطة واحدة عن كل كرة زرقاء مسحوبة. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد النقاط التي يحصل عليها اللاعب.

١) اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي وتباينه وانحرافه المعياري.

٢) احسب احتمال الحدث A : ظهور كرة زرقاء واحدة على الأكثر.

٣) إذا ظهرت كرة زرقاء واحدة على الأكثر بين الكرات المسحوبة، فما احتمال الحدث: B أن يكسب اللاعب نقطة واحدة.

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x) = ln\,(e^x + e^{-x} - 1)$

١) تحقق من كل من المقولات الآتية:

a) f معرف على $\mathcal{R}$. b) f يكتب بالشكل $f(x) = x + ln(1 + e^{-2x} - e^{-x})$.

c) المستقيم d الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$. d) f تابع زوجي .

٢) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها، وعيّن قيمته الحدية مبيناً نوعها .

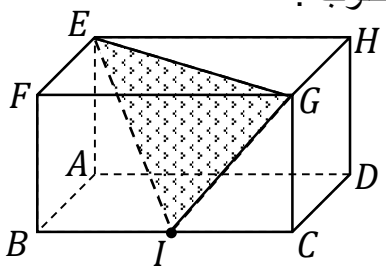
٣) استنتج أن المستقيم d' الذي معادلته $y = -x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

٤) ارسم كلاً من $d\,,d'$ ، ثم ارسم C في المعلم ذاته .

٥) بفرض التابع g مقصور التابع f على المجال $]0,+\infty[$.

أثبت أن التابع g حلاً للمعادلة التفاضلية $y + ln\,(y') = ln\,(e^x - e^{-x})$.

المسألة الثانية: $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = BF = 1$ و $AD = 2$ والنقطة I منتصف $[BC]$. نتأمل المعلم المتجانس $(A; \overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ ، المطلوب :



١) جد إحداثيات النقاط E, I, G ، ثم أثبت أن معادلة المستوي (EIG) هي: $2x - y + z - 1 = 0$

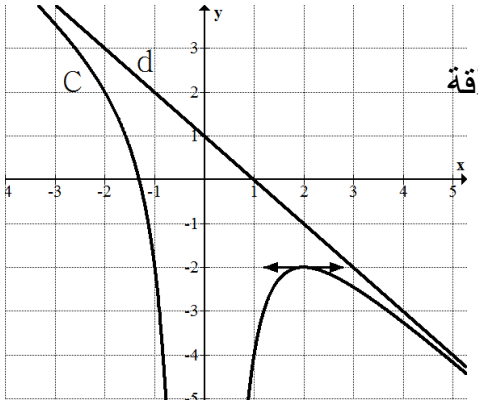
٢) أثبت أن المثلث EIG قائم، واحسب بُعد النقطة H عن المستوي(EIG) ، ثم استنتج حجم الهرم $(H - EIG)$

٣) جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة H ويعامد المستوي (EIG) ، واستنتج أن النقطة $N(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3})$ هي مسقط النقطة H على المستوي (EIG) .

٤) جد $\overrightarrow{NH}.\overrightarrow{HB}$ واستنتج أن $\widehat{NHB} = \frac{\pi}{3}$. ٥) عيّن مقطع متوازي المستطيلات بالمستوي (EIG) .

انتهت الأسئلة

أولاً - <u>أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية</u> : (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R^* وفق العلاقة $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2}$ حيث $a\ ,b\ ,c \in R$ و d مقارب مائل لـ C

١) جد معادلة المستقيم d .
٢) احسب قيمة كل من $a\ ,b\ ,c$.
٣) جد حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$.
٤) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -2$.

السؤال الثاني : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(-3,0,-1)$, $B(3,2,-1)$

نقرن بكل نقطة $M(x,y,z)$ من الفراغ المقدار $f(M) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$

١) احسب $f(M)$ بدلالة z,y,x .
٢) أثبت أن مجموعة النقاط M التي تحقق $f(M) = -6$ هي كرة يُطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R .

السؤال الثالث : حل جملة المعادلتين $2^x \times 2^y = 4$ (1)

$$2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^y = 6 \quad (2)$$

السؤال الرابع : لتكن المجموعة $S = \{0,1,2,\dots\dots,15\}$:

١) ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S ؟
٢) ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S مجموعها ليس من مضاعفات 3 ؟

ثانياً – <u>حل التمارين الأربعة الآتية</u> : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x) = x^3 - 3x + 3$ خطه البياني C والمطلوب:

١) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .
٢) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in R$ ثم بين أن $\alpha \in]-3,-2[$.
٣) ارسم الخط C .

التمرين الثاني : في معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقطتين A و B اللتين يمثلهما على الترتيب العددان العقديان $a = 1 + i$, $b = 1 - i$ والمطلوب :

١) عين العددين p و q حتى يكون a و b جذري المعادلة $z^2 + pz + q = 0$.
٢) جد الشكل المثلثي للعدد a واستنتج منه الشكل المثلثي للعدد b .
٣) استنتج قيمة العدد w حيث $w = a^6 + b^6$
٤) إذا علمت أن R دوران مركزه O وزاويته θ وأن $R(A) = B$ احسب θ : $\theta = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران R .

يتبع في الصفحة الثانية

الصفحة الثانية

التمرين الثالث : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3n + 4 \end{cases}$

ولتكن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ حسابية تحقق العلاقة : $t_{n+1} = 2t_n - 3n + 4$.

١) جد t_n بدلالة n .

٢) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $v_n = u_n - t_n$ هندسية ، اكتب v_n بدلالة n .

٣) استنتج u_n بدلالة n ، ثم بين فيما إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة أم متباعدة .

التمرين الرابع : في ناد رياضي يمارس 45% من أعضائه لعبة كرة الطاولة ونعلم أن 70% من أعضائه ذكور وأن 40% منهم لا يمارسون لعبة كرة الطاولة :

نختار عشوائياً أحد أعضاء النادي احسب :

١) احتمال أن يكون ذكر يمارس لعبة كرة الطاولة .

٢) احتمال أن يكون لا يمارس لعبة كرة الطاولة علماً أنه أنثى .

٣) احتمال أن يكون أنثى علماً أنه يمارس لعبة كرة الطاولة .

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن التابع g المعرف على $I =]0, \infty[$ وفق : $g(x) = x - 1 + lnx$.

وليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, \infty[$ وفق : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) lnx$.

١) بين أن $g(1) = 0$ ثم ادرس تغيرات g ونظم جدولاً بها واستنتج إشارة $g(x)$.

٢) جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه .

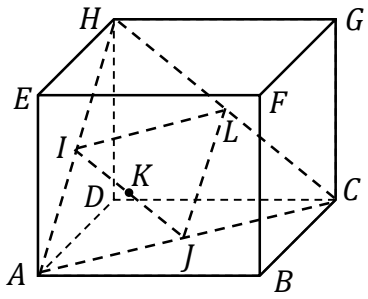
٣) بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ونظم جدول تغيرات f وبين أن $f(x) \geq 0$ أياً كانت $x \in I$.

٤) أثبت أن التابع F المعرف على I وفق: $F(x) = xlnx - x - \frac{1}{2}ln^2 x$ هو تابع أصلي للتابع f

٥) احسب مساحة السطح المحصور بين C_f ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$.

المسألة الثانية:

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 4 ، I مركز الوجه $ADHE$ ، J مركز الوجه $ABCD$ ، L مركز الوجه $DCGH$ ، K منتصف $[IJ]$. نتأمل المعلم المتجانس $(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AE})$.



١) هل G , K , A على استقامة واحدة .

٢) أثبت أن الرباعي $AJLI$ معين .

٣) أثبت أن النقاط A , K , G , D تقع في مستو واحد .

٤) استنتج أن النقطة A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة D , G , K يُطلب إيجاد تثقيلاتها .

٥) أثبت أن $\vec{n}(1,1,0)$ ناظم على المستوي (BDH) واكتب معادلة المستوي (BDH) .

انتهت الأسئلة

حلول النماذج الوزارية

النموذج الأول

السؤال الأول:

1- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

2- القيم الحدية $f(1) = 0$ قيمة حدية صغرى

3- حلول المتراجحة $f'(x) \le 0$ هي مجالات تناقص التابع و من الرسم نلاحظ أن الحلول هي $]0,1]$

(قمنا باغلاق المجال عند الواحد لأن المتراجحة أصغر أو يساوي و قمنا بفتح المجال عند الصفر لأنه خارج مجموعة التعريف)

4- يكون $\ln(f(x))$ معرف بشرط $f(x) > 0$ و هي تعني متى يكون التابع فوق المستقيم $y = 0$ فنلاحظ أن الحلول $]0,1[\cup]1,+\infty[$ (قمنا باستثناء الواحد لأنه عند $x = 1$ ينعدم $f(x)$ و نحن نريد أن يكون $f(x)$ أكبر تماماً من الصفر)

السؤال الثاني :

يكون المستقيم (AB) معامد للمستوي إذا كان الشعاع $\overrightarrow{AB}$ معامداً لشعاعي توجيه المستوي :

$$\overrightarrow{AB}(2,-4,,1)$$

$$\overrightarrow{AB}.\vec{u} = 4 - 4 + 0 = 0$$
$$\overrightarrow{AB}.\vec{v} = 6 - 8 + 2 = 0$$

فالمستقيم (AB) معامد للمستوي P

الآن يمكن اعتبار $\overrightarrow{AB}$ ناظماً للمستوي P:

$$2(x-0) - 4(y-0) + 1(z-0) = 0$$
$$2x - 4y + z = 0$$

السؤال الثالث :

1- نشكل التابع :

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}{x}$$
$$= \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1 \quad because \lim_{t\to 0}\frac{sint}{t} = 1$$

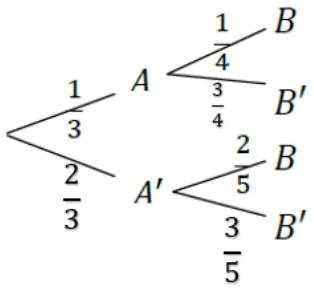
فالتابع f قابل للاشتقاق عند الصفر و

$$f'(0) = 1$$

2- معادلة المماس عند الصفر :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = x$$

السؤال الرابع :



$$P(A \cap B) = \frac{1}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$P(B) = \frac{1}{3}.\frac{1}{4} + \frac{2}{3}.\frac{2}{5} = \frac{1}{12} + \frac{4}{15} = \frac{21}{60}$$

و بالتالي :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{21}{60}} = \frac{\frac{5}{60}}{\frac{21}{50}} = \frac{5}{21}$$

السؤال الخامس :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

حساب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

اشتقاق f على R :

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$$

Natheer Tinawy

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	$++++$		
$f(x)$	0	↗	1

نلاحظ من جدول التغيرات أن $0 < f(x) < 1$ سو

بالتالي f محدود

السؤال السادس :

$$12\binom{n+2}{4} = 7\,P_n^3$$

نوجد شروط الحل :

$$n \geq 3 \quad \& \quad n+2 \geq 4$$
$$n \geq 3 \quad \& \quad n \geq 2$$

نقاطع فيكون شرط الحل $n \geq 3$

$$12\frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)}{4.3.2.1} = 7n(n-1)(n-2)$$
$$(n+2)(n+1) = 14(n-2)$$
$$n^2+3n+2 = 14n-28$$
$$n^2-11n+30 = 0$$
$$(n-6)(n-5) = 0$$
$$n = 6 \text{ g } n = 5$$

التمرين الأول : $f(x) = ax + b - lnx$

نشتق : $f'(x) = a - \frac{1}{x}$

1- بما أن المستقيم $y = 1$ مماس للخط c_f عند $x = 1$ فيمكن استنتاج معلومتين :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$y = 1$$

بالمقارنة نجد :

$$f'(1) = 0 \quad , \quad f(1) = 1$$

نعوض :

$$a - 1 = 0 \quad , \quad a + b = 1$$

و بالتالي $a = 1$, $b = 0$

$$f(x) = x - lnx$$

لندرس تغيراته :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{lnx}{x}\right)$$
$$= +\infty(1-0) = +\infty$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$----------0++++++++++++$				
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

التمرين الثاني :

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \quad , \quad u_0 = 2$$

1- نرمز للقضية $E(n): u_n > 1$

- نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$u_0 > 1$$
$$2 > 1$$

- نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$u_n > 1$ ... ... (الفرض)

- نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$u_{n+1} > 1$ ... (الطلب)

- البرهان :

لدينا من الفرض :

$$u_n > 1$$

نضرب بناقص :

$$-u_n < -1$$

نقلب الطرفين :

$$-\frac{1}{u_n} > -1$$

نضيف 2 :

$$2 - \frac{1}{u_n} > 1$$
$$u_{n+1} > 1$$

وهو المطلوب :

Natheer Tinawy

2- يمكن الحل باستخدام تعريق قضية و اثباتها

بالتدريج .. لكن سأستعرض لكم أسلوباً جديداً :

$$u_{n+1}-u_n=2-\frac{1}{un}-u_n=$$
$$\frac{2u_n-1-u_n^2}{u_n}=-\frac{u_n^2-2u_n+1}{u_n}$$
$$=-\frac{(u_n-1)^2>0}{u_n>1}<0$$

فمتناقصة

3- لدينا $v_n=3+\frac{1}{u_n-1}$

إثبات أنها حسابية :

$$v_{n+1}=3+\frac{1}{u_{n+1}-1}=3+\frac{1}{2-\frac{1}{u_n}-1}$$
$$=3+\frac{1}{1-\frac{1}{u_n}}=3+\frac{u_n}{u_n-1}$$

نشكل الفرق :

$$v_{n+1}-v_n=\left(3+\frac{u_n}{u_n-1}\right)-\left(3+\frac{1}{u_n-1}\right)$$
$$=\frac{u_n-1}{u_n-1}=1=r$$

فهي حسابية أساسها $r=1$

$$v_n=v_0+(n-0)r$$
$$v_n=\left(3+\frac{1}{2-1}\right)+n(1)$$
$$v_n=4+n$$

لإيجاد u_n نعزل

$$v_n=3+\frac{1}{u_n-1}$$
$$4+n=3+\frac{1}{u_n-1}$$
$$n+1=\frac{1}{u_n-1}$$

نقلب :

$$\frac{1}{n+1}=u_n-1$$
$$u_n=\frac{1}{n+1}+1$$
$$u_n=\frac{n+2}{n+1}$$

التمرين الثالث :

1- لنحسب الطويلة :

$$|w|=\left|\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right|=\frac{|\sqrt{3}+i|}{|\sqrt{3}-i|}=\frac{3+1}{3+1}=1$$

2- نعوض z_1 في المعادلة :

$$(i\sqrt{3})^2-(1+i\sqrt{3})i\sqrt{3}+i\sqrt{3}=0$$
$$-3-i\sqrt{3}+3+i\sqrt{3}=0$$
$$0=0$$

محققة

لاستنتاج الحل الآخر :

$$z_1+z_2=-\frac{b}{a}$$
$$i\sqrt{3}+z_2=\frac{(1+i\sqrt{3})}{1}=1+i\sqrt{3}$$
$$z_2=1$$

3- لدينا M_1 صورة M وفق تحاكٍ مركزه M_2 و نسبته k :

$$z_1-z_2=k(w-z_2)$$
$$i\sqrt{3}-1=k\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}-1\right)$$
$$i\sqrt{3}-1=k\frac{2i}{\sqrt{3}-i}$$
$$k=\frac{(i\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-i)}{2i}$$
$$k=\frac{3i+\sqrt{3}-\sqrt{3}+i}{2i}=2$$

المسألة الأولى :

$$2\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=$$
$$2\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\9\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$$

فالادعاء صحيح .

2- لدينا :

$$\left||2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|\right|=2\sqrt{21}$$

و حسب خاصة الاختزال :

$$\left||2\overrightarrow{ME}|\right|=2\sqrt{21}$$
$$||ME||=\sqrt{21}$$

Natheer Tinawy

فهي تمثل كرة مركزها E و نصف قطرها $\sqrt{21}$

3- نشكل شعاعين :

$$\overrightarrow{AB} = (-1,4,-2)$$
$$\overrightarrow{AD} = (1,2,0)$$

غير مرتبطين لعدم تناسب المركبات فالنقاط تعين مستوياً

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = -a + 4b - 2c = 0$$
$$\vec{n}\,\overrightarrow{AC} = a + 2b = 0$$

من 2 نجد : $a = -2b$ نفرض $b = 1$ فيكون $a = -2$

نعوض في الأولى :

$$+2 + 4 - 2c = 0$$
$$c = 3$$

و بالتالي $\vec{n}(-2,1,3)$ و نختار النقطة $B(0,3,1)$

$$-2(x-0) + 1(y-3) + 3(z-1) = 0$$
$$-2x + y + 3z = 0$$

4- لإيجاد تمثيل (EC) :

$$\vec{u} = \overrightarrow{EC} = (2,-1,-3) \quad , \quad E(4,-6,2)$$

$$(EC): \begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = -t - 6 \\ z = -3t + 2 \end{cases} : t \in R$$

- لإثبات أن (EC) يعامد المستوي (ABD)

يكفي اثبات ارتباط شعاع التوجيه مع الناظم :

$$\vec{u} = \overrightarrow{EC} = (2,-1,-3)$$
$$\vec{n} = (-2,1,3)$$

مرتبطان خطياً لتناسب المركبات

فالمستقيم (EC) يعامد المستوي

- لإيجاد نقطة التقاطع نعوض معادلات

المستقيم في معادلة المستوي :

$$-2(2t+4) + (-t+6) + 3(-3t+2) = 0$$
$$-4t + 8 - t + 6 - 9t + 6 = 0$$
$$-14t + 14 = 0$$
$$t = 1$$

نعوض في التمثيل :

$$H: \begin{cases} x = 6 \\ y = -7 \\ z = -1 \end{cases}$$
$$H(6,-7,-1)$$

5- يمكن حساب الارتفاع بطريقتين :

الأولى : EH و الثانية dis فنلاحظ :

$$h = \sqrt{4 + 1 + +9} = \sqrt{14}$$

قانون الحجم :

$$v = \frac{1}{3}sh$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{14}.\sqrt{14} = \frac{14}{3}$$

المسألة الثانية :

$$f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4$$

1- نشكل الفرق :

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2}{\sqrt{x}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

كما أن :

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

إذن C فوق Δ

2- النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يمين مقاربه

نشتق :

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}2}{x} = 1 - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x}}$$
$$f'(x) = 0 \to x = 1$$
$$f(1) = -1$$

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	
f	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

$f(1) = -1$ قيمة حدية صغرى

3- f مستمر و متناقص على المجال $]0,1[$ و $0 \in$ $]-1,+\infty[= f(]0,1[)$ فيوجد للمعادلة حل

Natheer Tinawy

وحيد في المجال $]0,1[$ (الحل الأول إذن

محصور بين العددين 0 و 1

f مستمر و متزايد على المجال $]1,+\infty[$ و

$0 \in f(]1,+\infty[) =]-1,+\infty[$

فيوجد حل وحيد ضمن المجال $]1,+\infty[$

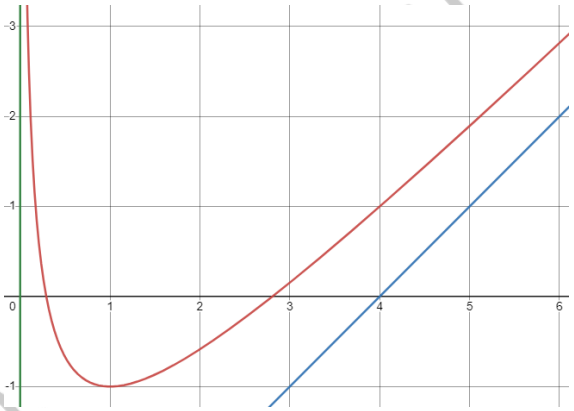
و لحصره نلاحظ أن $f(1) = -1 < 0$

و لنجرب $f(2) = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = -3 + \frac{2}{\sqrt{2}} <$ 0

لنجرب $f(3) = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$ فالحل محصور

بين 2 و 3

4- الرسم:



5- بما أن $f(x) > 0$ على المجال $[3,4]$:

$$S = \int_3^4 f(x)dx = \int_3^4 (x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4)$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 4\sqrt{x} - 4x\right]_3^4$$

$$= (8 + 8 - 16) - \left(\frac{9}{2} + 4\sqrt{3} - 12\right)$$

$$= \frac{15}{2} - 4\sqrt{3}$$

النموذج الثاني

السؤال الأول:

1- المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي لـ C

المستقيم الذي معادلته $x = -1$ مقارب شاقولي لـ C

المستقيم الذي معادلته $x = 2$ مقارب شاقولي لـ C

2- حل وحيد

3- $x \in]-1,2[$

4- التابع g معرف عندما : $-f(x) > 0$ وبالتالي $f(x) < 0$

أي: $D_g =]\frac{1}{2}, 2[\cup]2, +\infty[$

السؤال الثاني:

$\overrightarrow{u_d}(2,-3,4)$ شعاع موجه للمستقيم (d)

$\overrightarrow{u_{d'}}(-4,6,-8)$ شعاع موجه للمستقيم (d')

$\frac{2}{-4} = -\frac{3}{6} = \frac{4}{-8}$ فالشعاعان $\vec{u}_d$ و $\vec{u}_{d'}$ مرتبطان خطياً لتناسب مركباتها فالمستقيمان متوازيان.

يأخذ النقطة $A(3,-3,6)$ من d وذلك بتعويض $t =$ 0 في التمثيل الوسيطي لـ d وبتعويض إحداثيات النقطة A في التمثيل الوسيطي لـ d' نجد:

$$\begin{cases} 3 = -4s + 1 \Rightarrow s = -\frac{1}{2} \\ -3 = 6s \Rightarrow s = -\frac{1}{2} \\ 6 = -8s + 2 \Rightarrow s = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

بالتالي A نقطة مشتركة بين المستقيمين ولكونهما متوازيان فهما منطبقان

السؤال الثالث:

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$$

فالتابع f متزايد تماماً على I وبالتالي:

$$f(I) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [1,+\infty[= I$$

ملاحظة ((يمكن الحل باستخدام جدول التغيرات))

السؤال الرابع:

-1

$$f(x)-2=x\sin\frac{1}{x}$$

أياً كانت $x\in R^*$

$$-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1$$

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$$

نضرب الطرفين بـ: $|x|>0$

$$|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$$

$$\left|x.\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$$

فإن $|f(x)-2|\le|x|$

-2

بما أن $\lim_{x\to0}|x|=0$ فإن $\lim_{x\to0}f(x)=$

2 حسب مبرهنة المقارنة الثانية.

السؤال الخامس:

$$4^x-3\times2^x+2=0$$

$$2^{2x}-3\times2^x+2=0$$

$$(2^x-2)(2^x-1)=0$$

إما: $2^x-1=0\Rightarrow2^x=1\Rightarrow2^x=2^0\Rightarrow x=0$

أو: $2^x-2=0\Rightarrow2^x=2\ \Rightarrow\ x=1$

المتراجحة: $4^x-3\times2^x+2>0$ محققة من أجل:

$$x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$$

السؤال السادس:

-1

$$n(\Omega)=\binom{7}{3}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

-2

$$\text{عدد النتائج}=\underbrace{\binom{3}{3}}_{\text{زوجي}}+\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{فردي}}\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{زوجي}}$$

$$=1+3\times6=19$$

التمرين الأول:

-1 حسب شال:

$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FJ}\ \dots\dots(1)$$

$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EJ}\ \dots\dots(2)$$

$\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{FJ}$ شعاعين متعاكسين $\left(\overrightarrow{EJ}+\overrightarrow{FJ}=\vec{0}\right)$

$\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IG}$ شعاعين متعاكسين $\left(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\right)$

بجمع العلاقتين (1), (2) نجد:

$$2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{BE}$$

ومنه: $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$

فالأشعة $\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{GF},\overrightarrow{BE}$ مرتبطة خطياً

-2 وجدنا:

$$2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{BE}$$

لكون $\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{CB}$ إذاً $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$

بالتالي شعاع توجيه المستقيم (IJ) مرتبط خطياً مع شعاعي توجيه المستوي (CBE)

فالمستقيم (IJ) يوازي المستوي (CBE)

التمرين الثاني:

-1

$$u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

u_n تمثل مجموع n حدا متعاقبا من حدود متتالية هندسية أساسها: $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول $u_1=\frac{1}{2}$

$$u_n=u_1\times\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

وبالمطابقة مع الشكل $u_n=a+b\left(\frac{1}{2}\right)^n$

نجد أن: $a=1\ ,\ b=-1$

-2 لكون $a=1\ ,b=-1$ فإن: $u_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

Natheer Tinawy

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً $= u_{n+1} - u_n$

$\frac{1}{2^{n+1}} > 0$

$$t_{n+1} - t_n = 1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{n - n - 1}{n(n+1)}$$
$$= \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1$$

حيث أن $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$ وذلك كون $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

متتالية هندسية أساسها $-1 < q = \frac{1}{2} < 1$

ولدينا $\lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

إن المتتاليتين متجاورتان لأن

احداهما متناقصة والأخرى

متزايدة وتملكان النهاية ذاتها.

التمرين الثالث:

1- المقدار $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلي بحت إذا كان :

$z_M = z_C$ أو $\arg\left(\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}\right) = \pm\frac{\pi}{2}(2\pi)$

هذا يكافئ: $M = C$ أو $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}) \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

هذا يعني أن الشعاعين $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{CM}$ متعامدان

أي إن مجموعة النقاط M هي النقاط التي ترى

منها القطعة المستقيمة $[CB]$ تحت زاوية قائمة

باستثناء النقطة B إذاً مجموعة النقاط M تمثل

الدائرة التي قطرها $[CB]$ ماعدا النقطة B

2-

$$Z_D = i.Z_B = i(\sqrt{3} - i) = 1 + i\sqrt{3}$$

3-

$$w = Z_A - Z_B = \sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i = +2i$$
$$Z^2 = 2i = (1+i)^2$$

وبالتالي: $Z_1 = 1 + i$ أو $Z_2 = -1 - i$

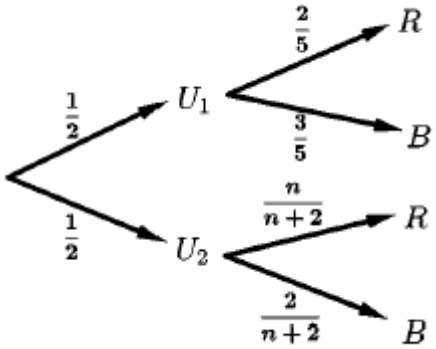
أو عن طريق إيجاد الجذور

التربيعية للعدد العقدي $2i$

بالشكل الجبري

المسألة الأولى:

أولاً:



$$P(U_1|R) = \frac{P(U_1 \cap R)}{P(R)}$$

$$P(U_1|R) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{n}{n+2}}$$

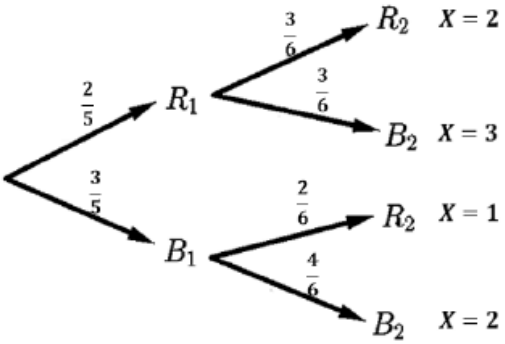
$$P(U_1|R) = \frac{2n+4}{7n+4}$$

$$\frac{2n+4}{7n+4} = \frac{2}{5} \Longrightarrow 10n + 20 = 14n + 8 \Longrightarrow n = 3$$

فتكون عدد الكرات الحمراء في الصندوق الثاني هو 3 كرات

ثانياً: قيم المتحول العشوائي $X(\Omega) = \{1,2,3\}$

كما هو موضح في الشجرة:



$$P(X = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{5}$$

$$P(X = 3) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{5}$$

Natheer Tinawi

$$P(X=2)=1-\big(P(X=1)+P(X=3)\big)$$
$$=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_ip_i=1\left(\frac{1}{5}\right)+2\left(\frac{3}{5}\right)+3\left(\frac{1}{5}\right)=2$$

المسألة الثانية:

1- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ومنه فإن المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب أفقي لـ C

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ ومنه فإن المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب شاقولي لـ C

الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{\ln x}{x}$$

- ولكون المقام موجب تماماً على المجال I فالإشارة تماثل إشارة $\ln x$
- على المجال $]0,1[$ يكون $\ln x<0$ فيكون C تحت مقاربه الأفقي
- على المجال $]1,+\infty[$ يكون $\ln x>0$ فيكون C فوق مقاربه الأفقي
- ويتقاطع C مع مقاربه الأفقي في النقطة $(1,0)$

2- التابع f معرف واشتقاقي على I ومشتقه:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

ينعدم المشتق عندما $1-\ln x=0$

$$\ln x=1$$

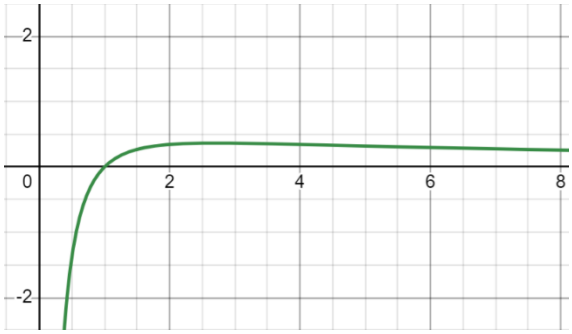
ومنه: $x=e$

وبالتالي: $f(e)=\frac{1}{e}$

$f(e)=\frac{1}{e}$ قيمة كبرى محلياً

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+++++++++$	0	$---------$	
$f(x)$	$\|\|$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0
	$-\infty$				

3- الرسم:



4- $m\in]-\infty,0]$ للمعادلة حل وحيد

$m\in]0,\frac{1}{e}[$ للمعادلة حلان مختلفان

$m=\frac{1}{e}$ للمعادلة حل وحيد

$m\in]\frac{1}{e},+\infty[$ ليس للمعادلة حلول

5- لدينا $f(a)=f(b)=m$ أي $\frac{\ln a}{a}=\frac{\ln b}{b}=m$

والشرط الازم والكافي ليكون للمعادلة $f(x)=m$ حلان مختلفان هو أن يكون $m\in]0,\frac{1}{e}[$

وعندها يكون: $f(a)=f(b)=m$ وبالتالي يوجد عددان a و b يحققان المطلوب.

6-

$$S=\int_1^e f(x)dx$$
$$S=\int_1^e \frac{1}{x}.\ln x\,dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$$
$$=\frac{(\ln e)^2}{2}-0=\frac{1}{2}$$

Natheer Tinawi

النموذج الثالث

السؤال الأول:

لدينا $n = 3$ وبالتالي:

$$E(X) = np \Rightarrow p = \frac{1}{3} \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{27}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

السؤال الثاني:

المستوي P مار بالنقطة B ويقبل الشعاع $\overrightarrow{AB}(-2,2,-4)$ شعاعاً ناظماً. ومنه:

$$P: a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0$$

$$P: -2(x - 3) + 2(y - 4) - 4(z + 1) = 0$$

$$P: x - y + 2z + 3 = 0$$

السؤال الثالث:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1$$

ميل المماس Δ للخط C_f في النقطة A يعطى بـ:

$$m_\Delta = f'(0) = \frac{1}{\sqrt{0+1}} - 1 = 0$$

ميل المستقيم (BC) يعطى بـ:

$$m_{(BC)} = \frac{y_B - y_c}{x_b - x_c} = \frac{1-1}{-1-3} = 0$$

مما سبق نجد أن:

$$m_\Delta = m_{(BC)} = 0 \Rightarrow \Delta || (BC)$$

السؤال الرابع:

-1

$$f(x) = \frac{x(x-1)+1}{x-1} = x + \frac{1}{x+1}$$

-2

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x + \frac{1}{x-1} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$$

وبالتالي المستقيم Δ مقارب للخط C_f بجوار $+\infty$

وبالتالي C_f فوق Δ دائماً

-3

$$f(x) - y = \frac{1}{x-1} > 0 \quad ; \quad x \in I$$

السؤال الخامس:

المتراجحة معرفة عندما $x > 0$ وتكافئ:

$$2\ln^2 x \geq 2\ln x$$

ومنه:

$$\ln x(\ln x - 1) \geq 0$$

إذن:

$$\ln x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$$

إذن:

$$x \in]0,1] \cup [e, +\infty[$$

السؤال السادس:

$$f(x) = 2\sin x \cdot \cos^3 x$$
$$= -2(\cos x)' \cdot \cos^3 x$$
$$F(x) = -\frac{2}{4}\cos^4 x + k$$
$$0 = -\frac{1}{2}\cos^4 \pi + k$$

ومنه:

$$k = \frac{1}{2}$$
$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos^4 x + \frac{1}{2}$$

Natheer Tinawy

التمرين الأول:

-1

$$A(0,0,0), H(0,2,2): \overrightarrow{AH}(0,2,2)$$
$$E(0,0,2), G(4,2,2): \overrightarrow{EG}(4,2,0)$$
$$I(2,0,0), J(4,2,1): \overrightarrow{IJ}(2,2,1)$$
$$\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EG} = (4,4,2) = 2(2,2,1) = 2\overrightarrow{IJ}$$

ومنه:

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$$

وبالتالي الأشعة $\overrightarrow{AH}$ و$\overrightarrow{EG}$ و$\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطياً.

-2

$$D(0,2,0), \overrightarrow{ID}(-2,2,0), \overrightarrow{IJ}(2,2,1)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IJ} = -4 + 4 + 0 = 0$$

-3

$$V_1 = \frac{1}{3}S_{CID} \times CG$$
$$V_2 = \frac{1}{3}S_{CID} \times CJ$$
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{CG}{CJ} = \frac{2CJ}{CJ} = 2 \Rightarrow V_1 = 2V_2$$
$$V = V_1 - V_2 = V_2 = \frac{1}{3}S_{CID} \times CJ$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}CD \times BC \times CJ$$
$$= \frac{1}{6} \times 4 \times 2 \times 1 \Rightarrow V = \frac{4}{3}$$

التمرين الثاني:

-1

$$x_{n+1} = x_n + 2 \Rightarrow X_{n+1} - x_n = 2$$

ومنه: $(x_n)_{n\geq 0}$ حسابية وأساسها $r = 2$

.

$$x_n - x_0 = (n-0)r \Rightarrow x_n = 2n + 3$$

-2 أياً كان العدد الطبيعي n فإن: $y_{n+1} - y_n =$

$x_n = 2n + 3 > 0$ إذن: $(y_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

-3 لدينا:

$$y_1 - y_0 = x_0$$
$$y_2 - y_1 = x_1$$
$$y_3 - y_2 = x_2$$
. . .
. . .
. . .
$$y_n - y_{n-1} = x_{n-1}$$

$$y_{n+1} - y_n = x_n$$

بالجمع نجد:

$$y_{n+1} - y_0 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

ولما كان: $y_0 = 0$ فإن:

$$y_{n+1} = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

-4

$$y_{n+1} = \frac{n+1}{2}(x_0 + x_n)$$
$$= \frac{n+1}{2}(3 + 2n + 3)$$
$$= (n+1)(n+3)$$
$$(n-1+1)(n-1+3) = n(n+2)$$
$$= n^2 + 2n$$

وبما أن:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$$

فتكون $(y_n)_{n\geq 0}$ متباعدة.

التمرين الثالث:

-1

a- مثلث $\binom{6}{3} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$

b- مثلث قائم $4 \times 3 = 12$

-2

رباعياً $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$

-3

كلمة $P_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

المسألة الأولى:

-1 التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

$y = 1$ مقارب أفقي لـ C_f بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(e^{-x}-1)}{e^x(1+e^{-x})}$$
$$= \lim_{x+\infty} \frac{(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})} = -1$$

$y = -1$ مقارب أفقي لـC_f بجوار $+\infty$

-2 مهما كان $x \in D_f = R$ فإن: $-x \in R$ ومنه:

$D_f = R$ مجموعة متناظرة.

Natheer Tinawy

$$f(-x)=\frac{1-e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{e^{x}-1}{1+e^{x}}$$
$$=-\frac{1-e^{x}}{e^{x}+1}=-f(x)$$

ومنه التابع f هو تابع فردي. وخطه البياني C_f متناظر بالنسبة للمبدأ O

3- التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على $R=]-\infty,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{-e^{x}(e^{x}+1)-e^{x}(1-e^{x})}{(e^{x}+1)^{2}}$$
$$=\frac{e^{x}(-e^{x}-1-1+e^{x})}{(e^{x}+1)^{2}}=\frac{-2e^{x}}{(e^{x}+1)}$$

f تابع متناقص على R

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	1	$\searrow$	-1

4-

$$T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$m=f'(0)=-\frac{1}{2}$$

فتكون معادلة المماس هي:

$$T: y=-\frac{1}{2}x$$

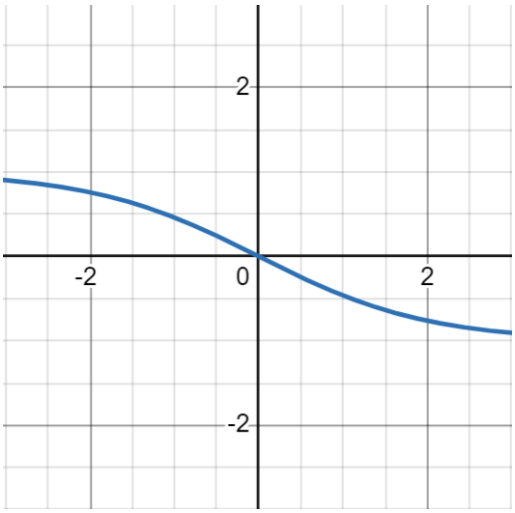
لدراسة الوضع النسبي لـ C_f مع T ندرس إشارة الفرق

$$g(x)=f(x)-y=\frac{1-e^{x}}{e^{x}+1}+\frac{1}{2}x$$
$$g'(x)=\frac{-2e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}+\frac{1}{2}=\frac{-4e^{x}+(e^{x}+1)^{2}}{2(e^{x}+1)^{2}}$$
$$=\frac{(e^{x}-1)^{2}}{2(e^{x}+1)^{2}}\geq 0$$

وينعدم g' عندما $x=0$ ونجد $g(0)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
الوضع النسبي	C تحت T				C فوق T

5-



6-

$$h(x)=\frac{|1-e^{x}|}{e^{x}+1}=\left|\frac{1-e^{x}}{e^{x}+1}\right|=|f(x)|$$

C_h ينتج عن C_f بتثبيت النقاط ذات الترتيب الموجب وأخذ نظائر النقاط ذات الترتيب السالب بالنسبة لمحور الفواصل .

المسألة الثانية:

1- صيغة التحويل:

$$z'-\omega=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)$$
$$z'-\omega=i(z-\omega)$$
$$\omega(1-i)=z'-iz$$
$$\omega(1+i)(1-i)=(1+i)z'-i(1+i)z$$
$$2\omega=(1+i)z'-(i-1)z$$
$$\omega=\frac{1}{2}[(1-i)z+(1+i)z']$$

2- A صورة B وفق دوران ربع دورة مباشر حول D وبالتالي:

$$d=\frac{1}{2}[(1-i)b+(1+i)a]\ \ \ldots\ldots(1)$$

B صورة C وفق دوران ربع دورة مباشرة حول M وبالتالي:

$$m=\frac{1}{2}[(1-i)c+(1+i)b]\ \ \ldots\ldots(2)$$

Natheer Tinaw

C صورة A وفق دوران ربع دورة مباشرة حول N وبالتالي:

$$n=\frac{1}{2}[(1-i)a+(1+i)c] \quad \dots\dots(3)$$

3- بجمع العلاقات: (1) و(2) و(3) نجد:

$$d+m+n=\frac{1}{2}(2a+2b+2c)$$

ومنه:

$$\frac{d+m+n}{3}=\frac{a+b+c}{3}$$

إذن: للمثلثين ABC وDMN مركز الثقل نفسه.

4- لدينا $a=0$ وبالتالي:

$$d=\frac{1}{2}(1-i)b\ ,n=\frac{1}{2}(1+i)c\ ,m=\frac{1}{2}[(1-i)c+(1+i)b]$$

لدينا:

$$m-a=m=\frac{1}{2}[(1-i)c+(1+i)b]$$

$$n-d=\frac{1}{2}[(1+i)c-(1-i)b]$$

$$n-d=\frac{1}{2}i[(1-i)c+(1+i)b]$$

$$\frac{n-d}{m-a}=i=e^{\frac{\pi}{2}i}$$

فالمستقيمان (AM) و(DN) متعامدان.

وبما أن: $n-d=i(m-a)$ فإن:

$|m-a|=|n-d|$ ومنه: $AM=DN$

النموذج الرابع

السؤال الأول:

1-

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ و $f'(1)=0$

2- $x=0$

3- $f(0)=0$ قيمة صغرى محلياً و $f(1)=1$ قيمة كبرى محلياً

4- مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)<0$ هي $]1,+\infty[$

5- مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي $\{0,e\}$

السؤال الثاني:

نضع: $5+x=1+u$

عندما x تسعى إلى -4 فإن u لا تسعى إلى 0

ويكون:

$$5+x=1+u\Rightarrow x+4=u\Rightarrow\frac{1}{x+4}=\frac{1}{u}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{x+4}=\frac{3}{u}$$

$$\lim_{x\to-4}f(x)=\lim_{x\to-4}(x+5)^{\frac{3}{x+4}}=\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{3}{u}}$$

$$=\lim_{u\to0}\left[\left((1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^3\right]$$

$$=\lim_{u\to0}\left(e^{\frac{\ln(1+u)}{u}}\right)^3=e^3$$

حيث: $\lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$

السؤال الثالث:

1- نلاحظ أن $f(-x)=\sin^2(-x)+\cos(-x)=\sin^2x+\cos x=f(x)$

و $f(x+2\pi)=\sin^2(x+2\pi)+\cos(x+2\pi)=\sin^2x+\cos x=f(x)$

فالتابع f دوري ويقبل العدد 2π دوراً له إذاً تكفي دراسة f على مجال طوله دور واحد وليكن $[-\pi,\pi]$ وبما أن التابع f تابع زوجي حيث $f(-x)=f(x)$ فإنه لدراسته على $[-\pi,\pi]$ يكفي دراسته على $[0,\pi]$

2- $f'(x)=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x\,(2\cos x-1)$

السؤال الرابع:

بما أن النقطة I منتصف $[AB]$ فإن I مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1),(B,1)$

وأن النقطة J منتصف $[BC]$ فإن J مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,2),(B,2)$

والنقطة K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1),(B,3),(C,2),(D,3)$

Natheer Tinawy

فحسب الخاصة التجميعية نجد

أن K مركز الأبعاد المتناسبة

للنقاط المثقلة

$(I,2),(J,4),(D,3)$ ومنه فإن

النقاط D,K,I,J تقع في مستوٍ

واحد

السؤال الخامس:

1- $\Omega=\{1,2,3,4\}$

$$A=\{1,3\}\Longrightarrow P(A)=\frac{1}{2}$$

$$B=\{2,3\}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}$$

$$A\cap B=\{3\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

$$P(A).P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ومنه نجد $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ إذاً الحدثان A وB مستقلان احتمالياً

2- القانون الاحتمالي:

x_1	1	2	3	4
$P(X=x_1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

التوقع الرياضي للمتحول العشوائي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_iP_i'$$

$$=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

السؤال السادس:

1-

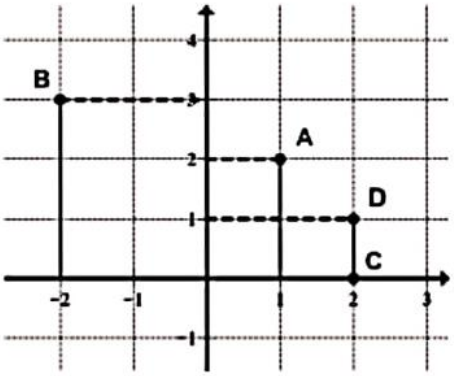
$$\binom{6}{1}\times 5!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$$

2-

$$\binom{6}{2}\times\binom{5}{2}\times4!=15\times10\times24=3600$$

التمرين الأول:

1-



2-

$$g=\frac{a+b+c+d}{4}$$

$$=\frac{1+2i-2+3i+2+2+i}{4}$$

$$=\frac{3+6i}{4}=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}i$$

3-

$$\frac{a-c}{d-c}=\frac{1+2i-2}{2+i-2}$$

$$=\frac{-1+2i}{i}=2+i$$

$$\frac{b-c}{a-c}=\frac{-2+3i-2}{1+2i-2}$$

$$=\frac{-4+3i}{-1+2i}$$

$$=\frac{(-4+3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}$$

$$=\frac{4+8i-3i+6}{1+4}=\frac{10+5i}{5}$$

$$=2+i$$

ومنه نجد أن $\frac{a-c}{d-c}=\frac{b-c}{a-c}$

نستنتج مما سبق أن

$(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$

فالمستقيم (AC) منصف

للزاوية $\widehat{BCD}$

Natheer Tinawi

التمرين الثاني:

-1

$$V_{n+1} = U_{n+2} - 2U_{n+1}$$
$$= \frac{5}{2}U_{n+1} - U_n - 2U_{n+1} = \frac{1}{2}U_{n+1} - U_n$$
$$= \frac{1}{2}(U_{n+1} - 2U_n) \Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$$

أي أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$V_0 = U_1 - 2U_0 \Rightarrow V_0 = 5 - 2 = 3 \Rightarrow V_0 = 3$$

ويكون $V_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

-2 إن مجموع $S_n = V_2 + V_4 + V_6 + \cdots + V_{2n}$

هو مجموع حدود متتالية جديدة $(t_n)_{n\geq 1}$

مأخوذة من المتتالية الهندسية السابقة

وعدد حدودها n حد بحيث:

$$t_n = V_{2n} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

وبالتالي $(t_n)_{t\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$

والحد الأول $t_1 = \frac{3}{4}$ ويكون:

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n = t_n \times \frac{1-q^n}{1-q}$$
$$= \frac{3}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 1$$

أي المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأعلى بالعدد 1 وبالتالي العدد 1 عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$

-3

$$S_{n+1} - S_n = t_{n+1}$$
$$= 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} > 0$$

والمتتالية متزايدة تماماً

ومحدودة من الأعلى $(S_n \leq 1)$

فهي متقاربة (1)

التمرين الثالث:

-1 عندما x تسعى إلى $+\infty$ تكون $|x| = x$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{4x^2+4x+3}}{x} = \frac{|x|\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}$$
$$= \sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) - 2x = \sqrt{4x^2+4x+3} - 2x$$
$$= \frac{4x^2+4x+3-4x^2}{\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)}$$
$$= \frac{4x+3}{\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)}$$
$$= \frac{x\left(4+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+2\right)} = \frac{4+\frac{3}{x}}{\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 2x] = \frac{4}{\sqrt{4}+2} = \frac{4}{4} = 1$$

-2 بما أن $a = 2 \in R^*$ و $b = 1 \in R$ فإن

المستقيم $\Delta: y = 2x + 1$ مقارب مائل للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$

-3

$$f'(x) = \frac{8x+4}{2\sqrt{4x^2+4x+3}} = \frac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$$

لدينا $g(x) = f(\tan x)$ ومنه $g'(x) =$

$f'(\tan x).(\tan x)'$ وبالتالي نجد:

$$g'(x) = \frac{4\tan x + 2}{\sqrt{4\tan^2 x + 4\tan x + 3}}(1+\tan^2 x)$$

المسألة الأولى:

-1 ليكن التابع h المعرف على I بالصيغة:

$$h(x) = f(x) - g(x)$$
$$h(x) = \ln(x+1) - 1 + \frac{1}{x-1}$$

التابع h اشتقاقي على I ومشتقه: $h'(x) =$

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

المقام $(x-1)^2$ موجب تماماً أياً كانت x من I

وإشارة المشتق من إشارة البسط $x - 2$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Natheer Tinawi

x	1		2		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$	0	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$	
$h(x)$	‖	↘	0	↗	

$$h(2) = 0$$

من الجدول نلاحظ أن $h(x) \geq 1$ أياً كان x من I

2- $f(x) = \ln(x-1)$

التابع معرف واشتقاقي على I

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب شاقولي لـ C_f

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} > 0$$

فالتابع f متزايد تماماً على I

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$$

التابع معرف واشتقاقي على I

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = -\infty$$

المستقيم الذي معادلته $y = 1$ مقارب أفقي لـ C_f بجوار $+\infty$

$$g'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} > 0$$

فالتابع g متزايد تماماً على I

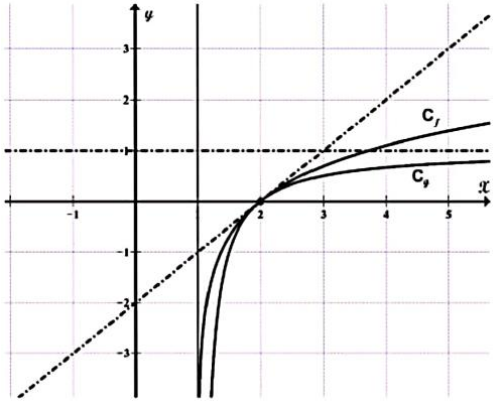
3- نلاحظ أن $\begin{cases} f(2) = g(2) = 0 \\ f'(2) = g'(2) = 1 \end{cases}$

إذاً الخطان C_f و C_g متماسان في النقطة $(2,0)$

ويقبلان مماس مشترك ميله $m = 1$ ومعادلته

من الشكل: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

بالتعويض نجد: $y = 1(x-2) + 0 \Rightarrow y = x - 2$



4- مساحة السطح:

$$S = \int_2^3 \ln(x-1)\,dx - \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$u(x) = \ln(x-1) \quad , \quad v'(x) = 1$$

نضع:

$$u'(x) = \frac{1}{x-1} \quad , \quad v(x) = x$$

وبالتالي نجد:

$$S = [x\ln(x-1)]_2^3 - \int_2^3 \left(\frac{x}{x-1}\right) dx - \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$= [x\ln(x-1)]_2^3 - \int_2^3 2dx$$

$$= [x\ln(x-1) - 2x]_2^3$$

$$= (3\ln 2 - 6) - (2\ln 1 - 4)$$

$$= \ln 8 - 2$$

المسألة الثانية:

1- من العلاقة $\left\|\overrightarrow{AN}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ نكتب

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (-6)^2}$$

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 81$$

Natheer Tinawy

ومنه مجموعة النقاط هي كرة مركزها A ونصف قطرها $AB = 9$

2- لدينا $\overrightarrow{AB}(-3,6,-6)$ ومنه شعاع التوجيه $\vec{u}(1,-2,2)$ والمستقيم يمر بالنقطة A

$$(AB): \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t - 2 : t \in R \\ z = 2t + 1 \end{cases}$$

3- نوجد مسقط النقطة $E(-2,4,0)$ على المستقيم (AB)

لذلك نكتب معادلة المستوي المار من E ويعامد المستقيم (AB) حيث يكون ناظمه هو شعاع توجيه المستقيم (AB) وهو $\vec{u}(1,-2,2)$ فتكون معادلته

$$(x + 2) - 2(y - 4) + 2(z - 0) = 0$$
$$x - 2y + 2z + 10 = 0$$

تقاطع المستقيم مع المستوي بالحل المشترك

$$(t + 2) - 2(-2t - 2) + 2(2t + 1) + 10 = 0$$
$$t + 4t + 4t + 2 + 4 + 2 + 10 = 0$$
$$t = -2$$

بالتعويض نجد نقطة التقاطع هي $C(0,2,-3)$

ومنه

$$dist(E,(AB)) = EC$$
$$= \sqrt{(0 + 2)^2 + (2 - 4)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{17}$$

بُعد $E(-2,4,0)$ عن المستوي $P: y + z + 1 = 0$

$$dist(E,P) = \frac{|0 + 4 + 0 + 1|}{\sqrt{0 + 1 + 1}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

4- لدينا $\overrightarrow{n_P}(0,1,1)$, $\overrightarrow{n_Q}(2,4,3)$. نلاحظ أن $\frac{0}{2} \neq \frac{1}{4}$

فالناظمان غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان متقاطعان.

لإثبات الفصل المشترك نعوض تمثيل المستقيم في معادلتي المستويين

في المستوي P:

$$-2t - 2 + 2t + 1 + 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

في المستوي Q :

$$2(t + 2) + 4(-2t - 2) + 3(2t + 1) + 1 = 0$$
$$2t + 4 - 8t - 8 + 6t + 3 + 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

والمستقيم محتوى في كل من المستويين فهو الفصل المشترك لهما

5- ناظم المستوي R مرتبط خطياً مع شعاع توجيه الفصل المشترك للمستويين P و Q لأن $\overrightarrow{n_R} = \vec{u}(1,-2,2)$ فهو يعامد كلاً من المستويين

تقاطع المستوي R مع الفصل المشترك

$$(t + 2) - 2(-2t - 2) + 2(2t + 1) = -1$$
$$t = -1$$

وتكون نقطة التقاطع هي

$$H(1,0,-1)$$

النموذج الخامس

السؤال الأول:

1- $f(0) = -1$ قيمة صغرى محلياً

$f(e) = \frac{1}{e-1}$ قيمة كبرى محلياً

2- $y = 0$

3- لدينا $e^3 > e^2$ والتابع f متناقص تماماً على المجال $]e, +\infty[$ إذاً $f(e^3) < f(e^2)$

4- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)+1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$

السؤال الثاني:

1- معادلة المخروط: $y^2 + z^2 - \frac{25}{4}x^2 = 0$ و $0 \leq x \leq 2$

2- معادلة الأسطوانة: $y^2 + z^2 = 25$ و $0 \leq x \leq 2$

3- $\begin{cases} 0 \leq x_M = 2 \leq 2 & \text{محققة} \\ (3)^2 + (4)^2 - \frac{25}{4}(2)^2 = 0 & \text{محققة} \end{cases}$

النقطة M تنتمي للمخروط

$\Leftarrow \begin{cases} 0 \leq x_M = 2 \leq 2 & \text{محققة} \\ (3)^2 + (4)^2 = 25 & \text{محققة} \end{cases}$

النقطة M تنتمي للأسطوانة

Natheer Tinawy

السؤال الثالث:

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{x}{2}+\binom{n}{2}\frac{x^2}{4}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{x^n}{2^n}$$

نعوض $x=1$

$$\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{4}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\binom{n}{n}=\left(1+\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

السؤال الرابع:

$$\ln\frac{x.y}{2}=\ln(y-x)^2$$

$$\frac{1}{2}x.y=y^2+x^2-2y.x$$

$$y^2-\frac{5}{2}x.y+x^2=0$$

$$\Delta=\frac{25}{4}x^2-4x^2=\frac{9}{4}x^2$$

إما:

$y=\frac{\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}x}{2}=\frac{1}{2}x$ مرفوض

أو:

$y=\frac{\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}x}{2}=2x$ مقبول

وبالتالي $y=2x$

التمرين الأول:

1- لدينا في جوار $-\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $-\infty+\infty$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}=\frac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

التفسير الهندسي: للخط C في جوار $-\infty$ مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=0$

2- المماس يوازي المستقيم Δ إذاً

$$f'(x)=m_\Delta=1$$

$$1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=1\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=0$$

$$\Rightarrow x=0\notin D$$

إذاً لا يقبل C مستقيماً مماساً موازياً للمستقيم Δ

3-

$$v=\pi\int_1^2\left(f(x)\right)^2dx$$

$$=\pi\int_1^2\left(x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1\right)dx$$

$$=\pi\int_1^2\left(2x^2+2x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}-1\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{2x^3}{3}+\frac{2(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3}-x\right]_1^2$$

$$=\pi\left(\left(\frac{16}{3}+2\sqrt{3}-2\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)\right)$$

$$V=\pi\left(\frac{11}{3}+2\sqrt{3}\right)$$

التمرين الثاني:

-1

$$z_1=2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\sqrt{3}i$$

-2

$$z_1.z_2=(2+2i).\left(1+\sqrt{3}i\right)$$

$$\Longrightarrow z_1.z_2=\left(2-2\sqrt{3}\right)+\left(2+2\sqrt{3}\right)i$$

$$z_1.z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow z_1.z_2=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

وبالتالي:

$$4\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12}=2+2\sqrt{3}\Rightarrow\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

3- صيغة التناظر المركزي

$$z'-w=-(z_1-w)$$

Natheer Tinawy

$$z' - (1-2i) = -(2+2i-1+2i)$$
$$z' = -6i$$

التمرين الثالث:

-1

$$u_1 = 1 \ , \quad u_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \ ,$$
$$u_3 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \ , \quad u_4 = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

-2 جميع حدود المتتالية موجبة تماماً

$$\frac{u_n+1}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{n!} = \frac{n^2}{n+1}$$

في حالة $n \geq 2$ يكون:

$$\frac{u_n+1}{u_n} = \frac{n+n(n-1)}{n+1} \geq \frac{n+2\times 1}{n+1}$$
$$> 1$$

إذاً المتتالية متزايدة بدءاً من $n_0 = 2$

-3 الخاصة المطلوبة: $E(n)$: $\langle n! \geq n(n-1)(n-2) \rangle$

أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 3$

الخاصة $E(3)$ صحيحة لأن: $3! = 6 \geq 3\times 2\times 1$

نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي: $n! \geq n(n-1)(n-2)$ صحيحة

نبرهن صحة الخاصة: $E(n+1)$ أي: $(n+1)! \geq (n+1)n(n-1)$ صحيحة

البرهان: حسب الفرض:

$$n! \geq n(n-1)(n-2)$$
$$\Rightarrow (n+1)n! \geq (n+1)n(n-1)(n-2)$$

بما أن $n \geq 3$ فإن $n-2 > 0$ وبالتالي يكون:

$$(n+1)! \geq (n+1)n(n-1)$$

بالتالي الخاصة $E(n+1)$ صحيحة

نستنتج أنه أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 3$ فإن

الخاصة $E(n)$ صحيحة

- حساب النهاية:

$$n! \geq n(n-1)(n-2)$$
$$\Rightarrow \frac{n!}{n^2} \geq \frac{n(n-1)(n-2)}{n^2}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n^2} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

وبالتالي المتتالية متباعدة

التمرين الرابع:

-1 مجموعة قيم المتحول العشوائي

$$\{-1, +1, +3\}$$

$$P(X=-1) \left(\text{حمراء , زرقاء , زرقاء} \right)$$
$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} \times 3 = \frac{3}{10}$$

$$P(X=+1) \left(\text{حمراء , حمراء , زرقاء} \right)$$
$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{10}$$

$$P(X=+3) \left(\text{حمراء , حمراء , حمراء} \right)$$
$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

x	-1	$+1$	$+3$
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i . p_i$$

$$== -1 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 . p_{i'} - \left(E(X)\right)^2$$

$$= (-1)^2 \times \frac{3}{10} + (1)^2 \times \frac{6}{10} + (3)^2 \times \frac{1}{10} - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{144}{100} = \frac{36}{25}$$

$$o(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{6}{5}$$

-2

$$P(A) = P(X=+1) + P(X=+3) = \frac{7}{10}$$

Natheer Tinawi

-3

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(X=+1)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{10}}{\frac{7}{10}}=\frac{6}{7}$$

المسألة الأولى:

-1

-a

$$e^x+e^{-x}-1=\frac{e^{2x}+1-e^x}{e^x}$$

$$=\frac{e^{2x}-2e^x+1+e^x}{e^x}$$

$$=\frac{(e^x-1)^2+e^x}{e^x}>0$$

إذاً التابع f معرف على R

-b

$$f(x)=\ln(e^x+e^{-x}-1)$$
$$=\ln\left(e^x(1+e^{-2x}-e^{-x})\right)$$
$$f(x)=x+\ln(1+e^{-2x}-e^{-x})$$

.a

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-2x}-e^{-x})=0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

وبالتالي المستقيم d مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

b. لدينا f معرف على R ولدينا:

$$f(-x)=\ln(e^{-x}+e^{+x}-1)$$
$$=\ln(e^x+e^{-x}-1)$$
$$=f(x)$$

إذاً التابع f تابع زوجي

-2

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}-1}$$

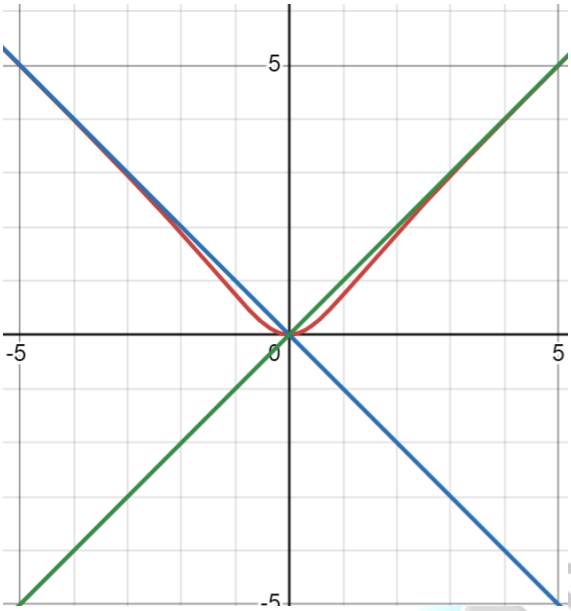
$$f'(x)=0\Rightarrow e^x-e^{-x}=0\Rightarrow e^x=e^{-x}$$
$$\Rightarrow x=0$$

$f(0)=0$ قيمة صغرى محلياً (قيمة حدية)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

-3 بما أن المستقيم d مقارب للخط C في جوار $+\infty$ والتابع f تابع زوجي إذاً المستقيم الذي معادلته $d': y=-x$ مقارباً مائلاً للخط C بجوار $-\infty$ وذلك لأن C متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب

-4



-5

$$l_1=\ln(e^x+e^{-x}-1)+\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}-1}\right)$$
$$=\ln\left((e^x+e^{-x}-1)\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}-1}\right)$$
$$=\ln(e^x+e^{-x}-1)=l_2$$

إذاً التابع g هو حل للمعادلة التفاضلية

$$y+\ln(y')=\ln(e^x-e^{-x})$$

Natheer Tinawy

المسألة الثانية:

-1

$$E(0,0,1), I(1,1,0), G(1,2,1)$$
$$\overrightarrow{EI}(1,1,-1), \overrightarrow{EG}(1,2,0)$$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (EIG)

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{EI} = 0 \Rightarrow a+b-c=0 \quad \dots\dots(1) \\ \vec{n}.\overrightarrow{EG} = 0 \Rightarrow a+2b=0 \quad \dots\dots(2) \end{cases}$$

بفرض $a=2$ نعوض في (2) نجد أن $b=-1$ ثم

نعوض في (1) نجد أن $c=1$ وبالتالي الناظم

$\vec{n}(2,-1,1)$ باختيار النقطة $E(0,0,1)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$(EIG): 2x-y+z-1=0$$

-2

$$\text{حسب عكس} \Leftarrow \begin{cases} EI=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3} \\ EG=\sqrt{1+4+0}=\sqrt{5} \\ GI=\sqrt{0+1+1}=\sqrt{2} \end{cases}$$

مبرهنة فيثاغورث نجد أن المثلث EIG قائم في I

لدينا النقطة $H(0,2,1)$

$$dist(H,EIG)=\frac{|ax_h+by_h+cz_h|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{|0-2+1-1|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$V=\frac{1}{3}S_{EIG}.h \qquad h=dist(H,EIG)$$

$$V=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}.\sqrt{2}}{2}\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{1}{3}$$

-3 بما أن المستقيم (d) يعامد المستوي

$(EIG): \vec{u}=\vec{n}=(2,-1,1)$ ولدينا $H(0,2,1)$

$$(d)\begin{cases} x=2t \\ y=-t+2 \\ z=t+1 \end{cases} \quad t\in R$$

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) في

معادلة المستوي (EIG) :

$$2(2t)-(-t+2)+(t+1)-1=0$$
$$\Rightarrow t=\frac{1}{3}$$

بالتعويض في التمثيل الوسيطي للمستقيم (d)

نجد $\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$ وبالتالي النقطة $N\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$ هي المسقط القائم

للنقطة H على المستوي (EIG)

-4 لدينا النقطة $H(0,2,1)$

$$\overrightarrow{HN}\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{1}{3}\right) \quad , \quad \overrightarrow{HB}(1,-2,-1)$$
$$\overrightarrow{HN}.\overrightarrow{HB}=\left(\frac{2}{3}\right).(1)+\left(\frac{-1}{3}\right).(-2)$$
$$+\left(\frac{1}{3}\right).(-1)=1$$
$$\overrightarrow{HN}.\overrightarrow{HB}=\left\|\overrightarrow{HN}\right\|.\left\|\overrightarrow{HB}\right\|.\cos\widehat{NHB}$$
$$\cos\widehat{NHB}=\frac{\overrightarrow{HN}.\overrightarrow{HB}}{\left\|\overrightarrow{HN}\right\|.\left\|\overrightarrow{HB}\right\|}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}.\sqrt{1+4+1}}=\frac{1}{2}$$
$$\widehat{NHB}=\frac{\pi}{3}$$

-5 التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) حيث

$$\overrightarrow{AB}(1,0,0) \Leftarrow A(0,0,0), B(1,0,0)$$
$$(AB)\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad ,t\in R$$

بالتعويض في معادلة المستوي (EIG) نجد أن:

$$2(t)-(0)+(0)-1=0$$
$$\Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

بالتعويض في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)

نجد $K\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ منتصف الحرف AB وبالتالي

مقطع متوازي المستطيلات بالمستوي (EIG)

هو الرباعي $EGIK$.

Matheer Tinawy